Douglas Lisboa Santos de Jesus

Entre a lógica e a retórica: axiomatizações da geometria euclidiana nos séculos XVI e XVII

Salvador
2023

Universidade Federal da Bahia
Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas
Programa de Pós-Graduação em Filosofia
Linha de pesquisa: epistemologia e filosofia da linguagem

Douglas Lisboa Santos de Jesus

Entre a lógica e a retórica: axiomatizações da geometria euclidiana nos séculos XVI e XVII

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Filosofia.

Orientador: Prof. Dr. Abel Lassalle Casanave

Salvador
2023

ATA Nº 11

Ata da sessão pública do Colegiado do PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA (PPGF), realizada em 06/10/2023 para procedimento de defesa da Tese de DOUTORADO EM FILOSOFIA no. 9, área de concentração Filosofia Contemporânea, do(a) candidato(a) DOUGLAS LISBOA SANTOS DE JESUS, de matrícula 218122531, intitulada Entre a lógica e a retórica: axiomatizações da geometria euclidiana nos séculos XVI e XVII. Às 14:00 do citado dia, PPGF, foi aberta a sessão pelo(a) presidente da banca examinadora Prof. Dr. ABEL LASSALLE CASANAVE que apresentou os outros membros da banca: Prof. Dr. JORGE ALBERTO MOLINA, Prof. Dr. MARCO AURELIO OLIVEIRA DA SILVA, Prof. Dr. WAGNER DE CAMPOS SANZ e Prof. Dr. FRANK THOMAS SAUTTER. Em seguida foram esclarecidos os procedimentos pelo(a) presidente que passou a palavra ao(à) examinado(a) para apresentação do trabalho de Doutorado. Ao final da apresentação, passou-se à arguição por parte da banca, a qual, em seguida, reuniu-se para a elaboração do parecer. No seu retorno, foi lido o parecer final a respeito do trabalho apresentado pelo candidato, tendo a banca examinadora aprovado o trabalho apresentado, sendo esta aprovação um requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor. Em seguida, nada mais havendo a tratar, foi encerrada a sessão pelo(a) presidente da banca, tendo sido, logo a seguir, lavrada a presente ata, abaixo assinada por todos os membros da banca.

gov.br Documento assinado digitalmente
WAGNER DE CAMPOS SANZ
Data: 08/10/2023 07:13:29-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. WAGNER DE CAMPOS SANZ, UFG

Examinador Externo à Instituição

gov.br Documento assinado digitalmente
FRANK THOMAS SAUTTER
Data: 08/10/2023 19:57:27-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. FRANK THOMAS SAUTTER, UFSM

Examinador Externo à Instituição

gov.br Documento assinado digitalmente
JORGE ALBERTO MOLINA
Data: 09/10/2023 17:39:41-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. JORGE ALBERTO MOLINA, UFBA

Examinador Interno

gov.br Documento assinado digitalmente
MARCO AURELIO OLIVEIRA DA SILVA
Data: 08/10/2023 20:29:12-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. MARCO AURELIO OLIVEIRA DA SILVA, UFBA

Examinador Interno

gov.br Documento assinado digitalmente
ABEL LASSALLE CASANAVE
Data: 09/10/2023 17:48:01-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. ABEL LASSALLE CASANAVE, UFBA

Presidente

gov.br Documento assinado digitalmente
DOUGLAS LISBOA SANTOS DE JESUS
Data: 25/03/2024 13:33:00-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

DOUGLAS LISBOA SANTOS DE JESUS

Doutorando(a)

Para Djanira Lisboa, *in memoriam*

Para Cleide, Teresa & Bárbara

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Abel Lassalle Casanave por tudo que tem representado em minha trajetória acadêmica nesses doze anos. Em primeiro lugar, sou grato pela orientação e pela confiança depositada neste projeto. Em segundo lugar, mas não menos importante, por ser um paradigma de atuação profissional e rigor filosófico.

Aos membros da banca, Prof. Dr. Frank Thomas Sautter (UFSM), Prof. Dr. Jorge Alberto Molina (UFBA), Prof. Dr. Marco Aurélio Oliveira da Silva (UFBA), e Prof. Dr. Wagner Sanz (UFG).

Ao Prof. Dr. Marco Aurélio Oliveira da Silva e ao Prof. Dr. Marco Cerami, do Departamento de Matemática da UFBA, pela participação na Banca de Qualificação desta Tese em 2019.

Ao Prof. Dr. Marco Aurélio Oliveira da Silva, pelo curso de latim sem o qual não teria sido possível sequer ler a literatura primária.

Ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da UFBA, pelo apoio institucional.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo financiamento desta pesquisa.

Ao Pastor Joáquisson "Jimi" Reis, meu grande e querido amigo, por não ter desistido de mim. Agradeço também a sua esposa Fabiana Lima.

À Igreja Presbiteriana Cumberland, por todo apoio espiritual, emocional e material nesse último ano.

Ao Departamento de Filosofia da Universidade do Estado da Bahia, com especial destaque à Drª Ivana Libertadoira Borges Carneiro, pelo apoio institucional e pela calorosa recepção.

Aos amigos e familiares: Davi e Aninha, Gilmara, Ana Paula, Mônica, Luana, Gabriel, Wilza e Ronem, e Andréia.

Sentimos que, mesmo que todas as questões científicas *possíveis* tenham obtido resposta, nossos problemas de vida não terão sido sequer tocados. É certo que não restará, nesse caso, mais nenhuma questão; e a resposta é precisamente essa.

Ludwig Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, 6.52.

RESUMO

Esta Tese tem como objetivo expor o debate sobre a natureza das demonstrações geométricas euclidianas ao longo dos séculos XVI e XVII. Adota-se como ponto de partida a recepção dos comentários do filósofo platônico Proclus aos *Elementos* de Euclides e da tradição da ciência demonstrativa apresentada nos *Analíticos posteriores* de Aristóteles. No cerne desse referido debate está uma disputa acerca da pertinência de alguns conceitos da retórica ante a alegada limitação da silogística em dar conta da maneira como os matemáticos tipicamente demonstram suas proposições. A prática matemática que se depreende dos *Elementos* admite uma coordenação entre dois tipos de justificativas, uma fornecida pela parte linguística, outra pela parte diagramática, que tem como objetivo principal, mas não exclusivo, a resolução de problemas geométricos. O estabelecimento de uma definição lógico-linguística de demonstração, muito influenciada por David Hilbert, resultou na dispensabilidade de diagramas. As axiomatizações do que se compreendia por geometria euclidiana nos séculos XVI e XVII, em sua maioria, estão inseridas na doutrina aristotélica da ciência demonstrativa. Sob essa perspectiva, a tradição de resolução de problemas é secundária. A despeito disso, Aristóteles entendia que as demonstrações deveriam satisfazer critérios lógicos e epistemológicos na mesma proporção. Ao contrário da filosofia da matemática do século XX, a concepção aristotélica de demonstração não era apenas um estudo sobre a consequência lógica. Todavia, a reconstrução silogística das demonstrações euclidianas não era o objetivo principal, especialmente porque Proclus lançou dúvidas sobre o poder da lógica aristotélica. A crise do método científico aristotélico abriu espaço para que se buscasse outras alternativas, dentre as quais a retórica. A maioria dos comentadores do texto euclidiano nesse período assumia que as demonstrações nos *Elementos* eram abreviadas propositalmente, o que lhes permitia falar em entimemas, i.e., silogismos retóricos. A inclusão de novos axiomas não contemplados no texto de Proclus, muitos dos quais antecipando o método axiomático-formal hilbertiano, permite restituir a versão completa da demonstração sem que isso implique em que a versão abreviada, i.e., entimemática, seja considerada ilegítima.

Palavras-chave: Demonstração. Geometria euclidiana. Aristóteles. Proclus. Lógica. Retórica.

ABSTRACT

This thesis aims to present the debate on the nature of Euclidean geometric proofs throughout the 16th and 17th centuries. It starts by examining the reception of the Platonic philosopher Proclus' comments on Euclid's *Elements* and the tradition of demonstrative science presented in Aristotle's *Posterior Analytics*. At the heart of this debate is a dispute about the relevance of certain rhetorical concepts in light of the alleged limitations of syllogistics in accounting for how mathematicians typically demonstrate their propositions. The mathematical practice inferred from the *Elements* allows for a coordination between two types of justifications, one provided by linguistic means and the other by diagrams, primarily but not exclusively aimed at solving geometric problems. The establishment of a logical-linguistic definition of proof, heavily influenced by David Hilbert, resulted in the dispensability of diagrams. The axiomatizations of what was understood as Euclidean geometry in the 16th and 17th centuries, for the most part, were embedded in Aristotle's doctrine of demonstrative science. From this perspective, the tradition of problem-solving is secondary. Nevertheless, Aristotle believed that proofs should satisfy both logical and epistemological criteria in equal measure. Unlike 20th-century philosophy of mathematics, Aristotle's conception of proof was not solely concerned with logical consequence. However, the syllogistic reconstruction of Euclidean proofs was not the primary goal, especially since Proclus raised doubts about the power of Aristotelian logic. The crisis of the Aristotelian scientific method paved the way for the exploration of alternative approaches, including rhetoric. Most commentators on the Euclidean text during this period assumed that the proofs in the *Elements* were intentionally abbreviated, allowing them to speak of enthymemes, *i.e.*, rhetorical syllogisms. The inclusion of new axioms not covered in Proclus' text, many of which anticipated Hilbert's formal axiomatic method, makes it possible to restore the complete version of the proof without implying that the abbreviated version, *i.e.*, enthymematic, is considered illegitimate.

Keywords: Proof. Euclidean Geometry. Aristotle. Proclus. Logic. Rhetoric.

RÉSUMÉ

Cette thèse a pour objectif d'exposer le débat sur la nature des démonstrations géométriques euclidiennes au cours des XVIe et XVIIe siècles. Nous prenons comme point de départ la réception des commentaires du philosophe platonicien Proclus sur les *Éléments* d'Euclide et de la tradition de la science démonstrative présentée dans les *Seconds Analytiques* d'Aristote. Au cœur de ce débat se trouve un conflit concernant la pertinence de certains concepts de la rhétorique face à la prétendue limitation de la syllogistique à rendre compte de la manière dont les mathématiciens démontrent généralement leurs propositions. La pratique mathématique qui découle des *Éléments* admet une coordination entre deux types de justifications, l'une fournie par la partie linguistique, l'autre par la partie diagrammatique, dont l'objectif principal, mais non exclusif, est la résolution de problèmes géométriques. L'établissement d'une définition logico-linguistique de la démonstration, fortement influencée par David Hilbert, a conduit à la dispense de diagrammes. Les axiomatisations de ce qui était compris comme géométrie euclidienne aux XVIe et XVIIe siècles sont pour la plupart intégrées à la doctrine aristotélicienne de la science démonstrative. Dans cette perspective, la tradition de la résolution de problèmes est secondaire. Néanmoins, Aristote considérait que les démonstrations devaient satisfaire à des critères logiques et épistémologiques dans la même mesure. Contrairement à la philosophie des mathématiques du XXe siècle, la conception aristotélicienne de la démonstration ne se limitait pas à une étude de la conséquence logique. Cependant, la reconstruction syllogistique des démonstrations euclidiennes n'était pas l'objectif principal, surtout parce que Proclus avait émis des doutes sur la puissance de la logique aristotélicienne. La crise de la méthode scientifique aristotélicienne a ouvert la voie à la recherche d'autres alternatives, parmi lesquelles la rhétorique. La plupart des commentateurs du texte euclidien à cette époque supposaient que les démonstrations dans les Éléments étaient délibérément abrégées, ce qui leur permettait de parler d'enthymèmes, c'est-à-dire de syllogismes rhétoriques. L'inclusion de nouveaux axiomes non pris en compte dans le texte de Proclus, dont beaucoup anticipaient la méthode axiomatique-formelle de Hilbert, permet de restituer la version complète de la démonstration sans que cela implique que la version abrégée, c'est-à-dire enthymématique, soit considérée comme illégitime.

Mots-clés: Démonstration. Géométrie euclidienne. Aristote. Proclus. Logique. Rhétorique.

SUMÁRIO

1. Demonstração, análise e historicidade

1.1. A análise lógica contemporânea

Esta Tese tem como objetivo expor o debate sobre a natureza das demonstrações geométricas euclidianas ao longo dos séculos XVI e XVII. Adota-se como ponto de partida a recepção de dois outros textos antigos: os *Analíticos posteriores* de Aristóteles e os comentários do filósofo platônico Proclus ao Livro I dos *Elementos* de Euclides. No cerne desse referido debate está uma disputa acerca da pertinência de alguns conceitos da retórica antiga ante a discrepância existente entre a silogística e a maneira como os matemáticos demonstram suas proposições.

A partir do século XIX começou a ser estabelecido um consenso na literatura filosófica de que uma definição rigorosa de demonstração, especialmente a demonstração matemática, não deveria contemplar justificativas extralinguísticas, como intuição, imaginação e diagramas. Com relação aos diagramas, mais especificamente os geométricos, alegava-se que, porque são imperfeitos, uma vez que são traços sensíveis, são logicamente inadmissíveis. As linhas desenhadas num quadro negro, à mão livre ou com o auxílio da régua, têm espessura, o oposto do que diz a segunda definição de Euclides, a saber, linha é comprimento sem largura[1]. O recurso aos diagramas poderia ser feito doravante *apenas* como recursos psicotécnicos no processo de descoberta (heurística) da resolução de novos problemas ou de novos teoremas.

Essa nova visão sobre o rigor matemático afetou diretamente os *Elementos* de Euclides. Como se sabe, Euclides usa sistematicamente os diagramas para justificar afirmações feitas em suas demonstrações. Veja-se, por exemplo, a resolução do primeiro problema do Livro I, qual seja, construir um triângulo equilátero sobre uma linha retilínea dada (Figura 1). No início da obra são explicitados três tipos de princípios: definições, postulados e noções comuns. Através desses princípios Euclides constrói dois círculos e

[1] Euclides, *Elementos*, Livro I, Definição 2. Para a edição crítica dos *Elementos*, ver Johan Ludvig Heiberg, *Euclidis Elementa*. In: Johan Ludvig Heiberg & Heinrich Menge, *Euclidis Opera Omnia*. Lipsiae: B.G. Teubneri, Volumes I-IV, 1883. As demais traduções lançadas desde então seguem essa edição. Ver *The Thirteen Books of the Elements*. Cambridge: Cambridge University Press, 1908, 3 Vols. Tradução, introdução e comentários: Thomas L. Heath; *Les Éléments*. Paris: Presses Universitaires de France, 1990. Tradução e comentários: Bernard Vitrac; *Elementos*. Madrid: Editorial Gredos, 1991. v. 3 Vols. Tradução, introdução e comentários: María Luisa Puertas Castaño; *Os Elementos*. São Paulo: UNESP, 2009. Tradução e introdução: Irineu Bicudo. Os princípios e proposições serão citados da seguinte maneira: numeral romano seguido de numeral indo-arábico (por exemplo, Definição I.1, Proposição I.2, etc.). Adotaremos esse tipo de citação para os demais tratados matemáticos.

mostra que seus raios são iguais à linha retilínea dada, de modo que a figura encerrada por tais segmentos iguais é, por definição, um triângulo equilátero. Contudo, a introdução do ponto *C* na intersecção dos dois círculos não é justificada por nenhum desses princípios. É preciso consultar o diagrama. Tais referências ao diagrama passaram a ser vistas como lacunas lógicas na argumentação, cuja devida correção passaria a ser um dos objetos de estudo de alguns dos principais matemáticos e lógicos do referido período.

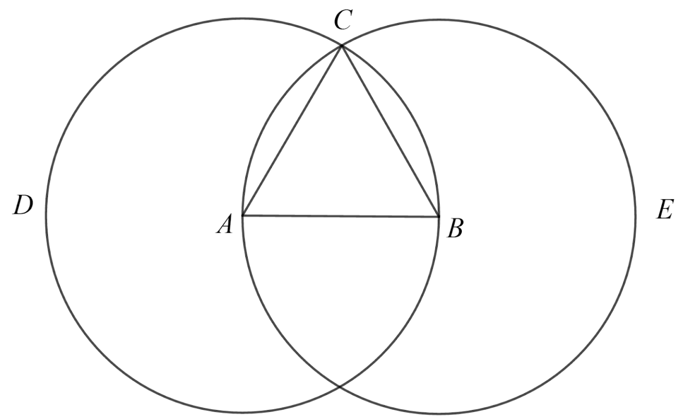

Figura 1: diagrama correspondente à primeira demonstração dos *Elementos*, Livro I

Sob a perspectiva contemporânea, corrigir lacunas lógicas em demonstrações parcialmente diagramáticas, como as de Euclides, significa dispensar o uso de diagramas. O método axiomático-formal exposto por David Hilbert em *Fundamentos da geometria*, de 1899, é o caso mais conhecido de dispensabilidade de diagramas relativamente à geometria euclidiana. “O teorema está recém demonstrado”, diz ele, “quando a demonstração é *completamente independente* da figura”[2]. Essa independência corresponde à explicitação dos axiomas necessários para a sequência dedutiva. Através desse método Hilbert conseguiu demonstrar os teoremas da geometria plana elementar dentro de outro sistema axiomático exposto nos *Fundamentos*. Ora, uma vez que o recurso aos diagramas passou a ser visto como uma lacuna na sequência inferencial, Hilbert abre a possibilidade de uma conclusão paradoxal: os argumentos euclidianos não seriam demonstrações. Para que esse fosse o caso, as lacunas lógicas (correspondentes às justificativas diagramáticas) deveriam ser preenchidas, o que, sob o ponto de vista hilbertiano destacado acima, significaria investigar quais novos axiomas seriam acrescentados.

[2] Passagem e tradução em Lassalle Casanave, *Por construção de conceitos: em torno da filosofia kantiana da matemática*, Rio de Janeiro, 2019, p. 102, destaque nosso.

A dispensabilidade dos diagramas também está associada ao sistemático processo de simbolização da lógica[3]. Ao estudo das demonstrações matemáticas se procederia através de alguma linguagem formal, cujo principal objetivo seria a *perspicuidade da forma lógica* daqueles argumentos. Alegava-se também que a formalização poderia superar as ambiguidades das línguas ordinárias e tornar todo o processo dedutivo mecânico, evitando com isso a suposta dependência de processos psicológicos. Para alcançar tal objetivo, a análise lógica que daí resultou mostrou a necessidade de uma fundamentação das relações e propriedades matemáticas anteriormente consideradas "óbvias", como a introdução do ponto *C* na demonstração euclidiana que mencionamos há pouco. Sob tal perspectiva, uma demonstração passaria a ser definida como um objeto sintático, a saber, uma sequência de fórmulas, tal que cada uma delas ou é um axioma ou se segue da aplicação prévia de uma regra de inferência válida.

Essa concepção de demonstração sem lacunas era um objetivo almejado pelas investigações lógico-matemáticas de Frege. Em *Os fundamentos da aritmética,* ele esclarece que a dúvida relativa ao seu projeto fundacional só poderia ser afastada "(…) por meio de uma cadeia de raciocínio sem lacunas, de modo que não seja dado nenhum passo que não se conforme a um dos poucos modos de inferência reconhecidos como puramente lógicos"[4]. Tais exigências, porém, deveriam considerar que o preenchimento de todas as lacunas tornaria as demonstrações muito longas. Eis porque a ponderação, feita na sequência: "Talvez até hoje não se tenha assim conduzido nenhuma demonstração, visto que os matemáticos se contentam com que cada passagem a um novo juízo se evidencie correta, sem indagar pela natureza desta evidência, se lógica ou intuitiva"[5]. Isso, porém, não deveria ser empecilho, como logo se lê no parágrafo seguinte:

> Impõe-se portanto a exigência de que sejam evitados todos os saltos na inferência. Que seja tão difícil satisfazê-la, isto deve-se à morosidade de um procedimento passo a passo. Toda demonstração um pouco mais complicada ameaça tornar-se enormemente longa. Além disto, a imensa variedade de formas lógicas estampadas na linguagem dificulta a delimitação de um

[3] Dentre os principais nomes, estão De Morgan (*Formal logic, or, The calculus of inference, necessary and probable*, 1847), George Boole (*The Laws of Thought*, 1854), Frege (*Conceitografia*, 1879), John Venn (*Symbolic logic*, 1881) e Peano (*Formulario mathematico*, 1895). Bertrand Russell, que também pertence a essa tradição com o *Principia mathematica*, conheceu Peano no Congrès International de Philosophie (III: Logique et Histoire des Sciences). Menção especial também a Louis Couturat, responsável por publicar os textos lógicos de Leibniz (*La logique de Leibniz: d'après des documents inédits*, 1901). Para uma exposição detalhada sobre essa tradição lógica, ver Martha Kneale & William Kneale, *The Development of Logic*, New York, 1962, capítulos 5-8.

[4] Frege, *Os fundamentos da aritmética*, §90. Tradução de Luís Henrique dos Santos (Coleção Os Pensadores da Abril Cultura, 1974, vol. 36). Vide também o Prefácio da *Conceitografia* In J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931,* Cambridge, [1879] 1967.

[5] *Idem.*

> conjunto de modos de inferência suficiente para todos os casos e que se pudesse facilmente abarcar[6].

O “formalismo” de Hilbert e o “logicismo” de Frege tiveram uma influência enorme sobre a filosofia da matemática do século XX, sobretudo na geração de jovens que começava a surgir: Rudolf Carnap, Alfred Jules Ayer, Hans Reichenbach, Karl Popper e Carl Gustav Hempel, para mencionar os principais[7]. Isso ajudou a consolidar uma certa perspectiva sobre a análise lógica no centro da epistemologia da matemática contemporânea. Em sua famosa conferência em 1900 sobre os problemas matemáticos mais importantes para o século XX, Hilbert antecipa a possibilidade de alargar o método axiomático-formal apresentado por ele nos *Fundamentos da geometria* para além do estudo sobre os fundamentos da matemática. Afinal, se, por exemplo, os fundamentos da física teórica são estabelecidos matematicamente e os princípios da matemática são estudados pelo método axiomático, esse método também diz respeito à física teórica. Diz Hilbert:

> (...) sempre que, do lado da teoria do conhecimento ou da geometria, ou das teorias da ciência natural ou física, surgem ideias matemáticas, surge o problema para a ciência matemática investigar os princípios subjacentes a essas ideias e assim estabelecê-las sobre um sistema simples e completo de axiomas, [de maneira] que a exatidão das novas idéias e sua aplicabilidade à dedução não devem ser inferiores às dos antigos conceitos aritméticos[8].

Notável também, ainda que surpreendente, é a influência do método axiomático sobre a historiografia da matemática. Surpreende porque, sem o devido distanciamento metodológico, críticas aos tipos de argumentação matemática a partir do ponto de vista contemporâneo correm o risco de anacronismo. Ainda assim, tem sido uma prática comum entre historiadores da matemática não só a comparação entre Euclides e Hilbert, como a censura daquele pela “falta de rigor” decorrente do apelo aos diagramas. O melhor exemplo a esse respeito é o de Thomas Little Heath em sua tradução dos *Elementos* de 1908[9], para o qual Euclides não teria

---

[6] *Idem,* §91.

[7] Carnap foi muito mais influenciado por Frege e Russell. O primeiro foi seu professor na Universidade de Jena entre 1910 e 1914.

[8] Hilbert, Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8, 1902, p. 442. Hilbert esclarece em carta a Frege, datada de 1899, o raciocínio por trás dos *Fundamentos*. Diz ele que o seu sistema seria tal como um cimbramento, um andaime conceitual com articulações bem definidas. Em suas próprias palavras, “[…] cada teoria é apenas um cimbramento ou esquema de conceitos junto a relações necessárias entre si, e os elementos básicos podem ser pensados de qualquer maneira que alguém deseje. Se ao falar em meus pontos eu penso em algum sistema de coisas, e.g., o sistema: amor, lei, limpador de chaminé… e então assumo todos os meus axiomas como relações entre essas coisas, então minhas proposições, e.g., o teorema de Pitágoras, também são válidas para essas coisas. Em outras palavras: qualquer teoria sempre pode ser aplicada a uma quantidade infinita de sistema de elementos básicos” Ver Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Tradução de Hans Kaal, Oxford, 1980b.

[9] Euclides, *The Thirteen Books of the Elements*, Tradução, introdução e comentários de Thomas L. Heath, Cambridge, 1908. Ainda sobre comparações entre Euclides e a geometria contemporânea de Hilbert, ver Ian

como justificar a introdução do ponto C (vide Figura 1) e, portanto, não teria alcançado uma demonstração de I.1.

Dentre os autores mencionados que tentaram fundamentar a matemática, nenhum deles se propôs a estudar sistematicamente o método inferencial euclidiano tal como exposto nos *Elementos*. Para eles, "geometria euclidiana" tinha a mesma amplitude semântica que "geometria plana elementar de fins do séculos XIX", de maneira que, embora os resultados (i.e., os teoremas) fossem os mesmos, o método argumentativo poderia variar muito. Por exemplo, era uma praxe do século XIX expressar algumas proposições euclidianas através de fórmulas algébricas, apesar de Euclides sempre argumentar em linguagem natural. Nesse sentido, a axiomatização de Hilbert não é (e nunca pretendeu ser) uma reconstrução fiel da geometria euclidiana de acordo com os princípios e métodos expostos nos *Elementos*.

Uma abordagem epistemológica e historiográfica relativamente aos *Elementos* impõe a necessidade de uma investigação parcimoniosa e que evite, até onde for possível, anacronismos. O que se nota, ao contrário, é uma crítica generalizada sobre os diagramas na matemática por causa da limitação desses artefatos em outras áreas, como na análise. Que justificativas diagramáticas sejam inadequadas em determinadas situações não implica que sejam sempre. Há de se notar, além disso, que os críticos de Euclides não costumam demonstrar interesse em saber por que nenhuma falácia ocorre nos *Elementos, apesar dos diagramas.*

Pode-se considerar a definição *standard* de demonstração como um dos derradeiros episódios do debate filosófico sobre o conhecimento matemático e seus princípios, uma longa trama que antecede o sistema axiomático-formal de Hilbert e o logicismo de Frege. No início do séc. XIX, Bernard Bolzano já reivindicava para as matemáticas uma concepção de demonstração puramente discursiva, composta apenas por conceitos. Segundo ele, "(...) onde se supõe que o mais alto grau de rigor científico deve ser alcançado, considero ser um dever não deduzir nada da mera aparência de uma figura, de uma suposta intuição, seja ela pura ou de outro tipo"[10].

Nos últimos anos a historiografia tem considerado que esses autores, na verdade, compartilham de um mesmo núcleo filosófico acerca da natureza das ciências. De acordo com De Jong & Betti, esse núcleo filosófico compartilhado por Frege, Hilbert e Bolzano seria o

---

Mueller, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, Massachusetts, 1981; Hartshorne, *Euclid and beyond*, New York, 2000.

[10] Bolzano, *Theory of Science*, tradução Paul Rusnock e Rolf George, Oxford, 2014, vol. IV, §532. Ver também vol. III, §370.

"modelo clássico de ciência"[11]. De Jong & Betti argumentam que o modelo de racionalidade científica exposta primeiramente nos *Analíticos posteriores* de Aristóteles é perpetuado ao longo dos séculos, persistindo (e resistindo, como veremos) através de vários autores, especialmente os modernos. O debate sobre o método remontaria à doutrina aristotélica, congregando ao longo dos anos nomes como Antoine Arnauld & Pierre Nicole (autores da *Lógica de Port-Royal*), Leibniz, Christian Wolff e Kant, chegando ao séc. XIX com Bolzano, Frege e Hilbert. Esse modelo também estaria no cerne das principais publicações científicas do período, como em Kepler, Galileu e Newton. De Jong & Betti caracterizam o modelo clássico da seguinte maneira. É um conjunto linguístico composto por conceitos e proposições. Os conceitos ou são fundamentais (também chamados primitivos) ou definidos a partir dos fundamentais. As proposições ou são fundamentais (princípios) ou são demonstradas a partir das proposições fundamentais. As proposições são verdadeiras, universais e necessárias.

Com esses requisitos, percebe-se que uma demonstração, segundo o modelo clássico, é exclusivamente linguística, o que permite, a princípio, uma conexão entre a tradição aristotélica e as investigações sobre os fundamentos da matemática nos séculos XIX e XX. A compreensão desse período, portanto, ajuda a mostrar como a filosofia passou a favorecer a análise lógica da teoria matemática de Euclides em detrimento de sua prática. Tanto o sistema axiomático de Hilbert quanto o logicismo de Frege podem ser considerados herdeiros dessas discussões, o que não quer dizer, porém, que estivessem interessados em defender a concepção aristotélica de ciência demonstrativa — pelo menos não deliberada nem diretamente. Este trabalho espera poder contribuir para a história das ciências exatas na medida em que joga alguma luz sobre a (des)continuidade da concepção aristotélica de ciência demonstrativa adotando como tema principal os esforços de adaptar a geometria euclidiana ao modelo clássico nos séculos XVI-XVII.

Todavia, De Jong & Betti não discutem as possíveis incompatibilidade resultantes da comparação entre a geometria euclidiana e o modelo clássico por causa da ocorrência de inferências diagramáticas. Nos últimos anos, Vincenzo De Risi[12] e Lassalle Casanave têm

[11] Ver De Jong, W. R. Bernard Bolzano: Analyticity and the Aristotelian model of science. *Kant-Studien*, 92, p. 328–349, 2001; *id.*, The analytic-synthetic distinction and the classical model of science: Kant, Bolzano and Frege. *Synthese* 174, p. 237-261, 2010; De Jong, W. R. & Betti, A. The Classical Model of Science: a millennia-old model of scientific rationality. *Synthese*, 174, p. 185–203, 2010.

[12] De Risi, The development of Euclidean axiomatics. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 70, n. 6, p. 591-676, 2016. Ver também Sabine Rommevaux, *Clavius: une clé pour Euclides au XVIe siècle*, Paris, 2005; Antoni Malet, Euclid's Swan Song: Euclid's *Elements* in Early Modern Europe. In: Paula Olmos, *Greek Science in the Long Run: Essays on the Greek Scientific Tradition (4th c. BCE-17th c. CE)*. Newcastle, 2012. Essas observações são antecipadas por Heilberg, *Euclidis Opera omnia*, vol. V, 1888, *Prolegomena critica*, XCVIII-CXIII.

destacado as reconstruções dos *Elementos* na Modernidade como um importante momento de novas reflexões sobre o conhecimento matemático. Por sua vez, Lassalle Casanave & José Ferreirós[13] observam também que muitas vezes os autores modernos contemplados na lista de De Jong & Betti e que pretendiam aplicar o quadro conceitual aristotélico aos *Elementos* deliberadamente deixavam de lado algum dos princípios discutidos nos *Analíticos posteriores* ou declaravam, contra Aristóteles, que os princípios não eram independentes e indemonstráveis. Portanto, ainda que o esquema exposto no *Órgano* possa ser considerado uma base comum do modelo clássico, disso não resultou uma reivindicação integral do pensamento aristotélico, quer seja na modernidade, quer seja na contemporaneidade.

Agora, uma linha investigativa que pode ajudar a esclarecer o debate sobre a compatibilidade das demonstrações parcialmente diagramáticas de Euclides e os requisitos lógicos e epistêmicos de Aristóteles começa com a recepção do *Comentário ao Livro I dos Elementos* de Proclus[14]. Proclus foi o último grande líder da Academia platônica. Ele viveu no século V d.C., vindo a comandar aquele espaço até sua morte, em 485. O seu *Comentário* ao texto euclidiano só foi introduzido na Europa no século XVI, ajudando a compensar a escassez de registros historiográficos sobre Euclides e seus *Elementos*. Por intermédio de seu texto — que apesar de sua importância histórica, tem muitas inconsistências, como esta Tese terá a oportunidade de mostrar — Euclides passou para a posteridade como um sistematizador da *paidéia* platônica[15]. É por causa dessa filiação que Proclus diz que o objetivo dos *Elementos* viria a ser uma propedêutica para a dialética platônica. Daí a crítica de Proclus ao abstracionismo aristotélico. Segundo ele, se o conhecimento matemático fosse baseado na abstração dos atributos físicos dos corpos, como alegadamente propunha Aristóteles, então a geometria seria uma disciplina empírica, o que seria uma flagrante contradição com os atributos de um teorema, a saber, universalidade e necessidade, requisitos estes que deveriam estar explicitados no silogismo científico. Daí a sua indagação:

> Onde, dentre as coisas sensíveis, vemos um ponto sem parte, uma linha sem largura, uma superfície sem grossura, igualdade de linhas a partir do centro ou, em geral, quaisquer figuras poligonais ou poliedrais sobre as quais nos ensina a geometria? E como as proposições desta ciência permanecem irrefutáveis quando as figuras e formas das coisas sensíveis são apenas mais

[13] Lassalle Casanave & Ferreirós, Dedekind and Wolffian deductive method. *Journal for General Philosophy of Science*, v. 53, n. 4, p. 345-365, 2022.

[14] Proclus, *In Euclidis,* 65.7-68.21. A paginação é sempre a da edição crítica estabelecida por G. Friedlein, *Procli Diadochi in Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii*, Leipzig, 1873. A tradução segue o texto de Glenn Morrow, *A commentary on the First Book of Euclid's Elements*, Princeton, 1992.

[15] Entende-se aqui o grupo de disciplinas mencionadas no Livro IV da *República*: as matemáticas (geometria plana e estereometria, i.e., geometria dos sólidos, e aritmética), astronomia e harmônica (teoria musical).

> ou menos o que são, movendo-se e mudando de toda maneira, cheias de indeterminação da matéria, quando a igualdade é composta por seu oposto, desigualdade, e indivisíveis como divisível e separado?[16]

Apesar disso, Proclus não conseguiu (ou não teve interesse em) desenvolver algum tipo de análise lógico-linguística para dar conta do uso dos diagramas; ainda é o método inferencial *more geometrico* consagrado por Euclides que Proclus vai tentar imitar em seu tratado *Elementatio theologica*. Ou seja, embora a passagem acima seja parecida com as críticas feitas ao uso dos diagramas nas demonstrações matemáticas, o alvo de Proclus não eram essas representações gráficas.

Apesar disso, Proclus ainda aplica ao método inferencial euclidiano o esquema conceitual da ciência demonstrativa exposta nos *Analíticos* de Aristóteles. Isso não era novidade. A ligação entre matemática e lógica era uma reivindicação explícita entre os comentadores peripatéticos mais antigos, como Alexandre de Afrodísias, o qual já comparava Euclides e Aristóteles – na maioria das vezes, o primeiro para explicar o segundo[17]. Essa linha interpretativa se manteve desde então, sendo ainda hoje favorecida por parte da literatura especializada[18].

A recepção de Euclides no início da Modernidade precipitou reflexões críticas acerca tanto dos princípios quanto do método apresentados nos *Elementos*. Durante muito tempo a literatura especializada desprezou as discussões sobre os princípios euclidianos, exceto pelo Postulado 5 — o famoso Postulado das Paralelas —, para o qual existe farta literatura. Esse comportamento também é visível relativamente a Proclus, que embora seja tratado hoje em dia como "um mero comentador" de Platão e Euclides, era citado pela maioria dos autores modernos. Ora, Proclus é uma das mais antigas fontes a respeito das tentativas de demonstração do Postulado das Paralelas, sendo ele próprio responsável por alguns desses argumentos. Proclus é também a mais antiga fonte sobre o debate acerca da "quantidade apropriada" de princípios euclidianos e se eles eram suficientes para demonstrar os teoremas. Nalguns casos, ele não hesita em sugerir a reformulação de algum dos princípios euclidianos ou até mesmo introduzir alguma nova proposição[19]. Proclus também diz que os

---

[16] Proclus, *In Euclidis*, 49.6-21. Vide também as advertências de Platão (*República*, 510e) e Aristóteles (*Analíticos posteriores*, 76b40-44).

[17] Ver Alexandre de Afrodísias, *On Aristotle Prior Analytics* 1.23-31, Tradução: Ian Mueller, New York, 2006. A aplicação da lógica às matemáticas, e o uso dos *Elementos* como paradigma, foi um tema muito mais associado aos herdeiros de Aristóteles. Não há indícios de que tal conexão interessou aos estóicos.

[18] Ver Euclides, *The Thirteen Books of the Elements*, Tradução e comentários de Thomas L. Heath, Cambridge, 1908, 117-124.

[19] Proclus explicitamente recomenda a inclusão da seguinte proposição: *duas retas não encerram um espaço* (vide *In Euclidis*, 239-40). Várias traduções dos *Elementos*, tanto as medievais quanto as do início da modernidade, passariam a incorporar esse princípio assumindo que tivesse sido formulado pelo próprio Euclides.

postulados podem ser demonstrados a partir das definições, uma tese que seria defendida por vários autores na Modernidade.

Tudo isso considerado, a recepção dos comentários de Proclus ajuda a explicar as principais modificações feitas nos *Elementos* na Modernidade. Vejamos então o porquê desse período ser tão importante para o tema desta Tese.

1.2. O renascimento do conhecimento matemático no século XVI

Após a Queda de Constantinopla, em 1453, o êxodo de intelectuais acelerou o processo de assimilação do conhecimento grego na Europa, especialmente na Itália, favorecida por sua posição geográfica[20]. Os *Elementos* de Euclides era o principal tratado de matemática teórica estudado na Europa desde o século XIII, quando traduções árabes chegaram da Península Ibérica e do Oriente Médio. Isso começou a mudar na segunda metade do século XV graças a cientistas e filósofos que buscavam inspiração nas doutrinas de Platão. Alguns dos principais nomes passaram por Roma entre 1461 e 1462: Basílio Bessarion (1403 – 1472), Paolo dal Pozzo Toscanelli (1397 – 1482), Leon Battista Alberti (1404 - 1472), na época secretário apostólico de Pio II, Nicolas de Cusa (1401 – 1464) e Regiomontano (Johannes Müller, 1436 – 1476). Por outro lado, não se pode subestimar a importância dos humanistas para essa revitalização da matemática sob o pretexto de não se ter introduzido nenhuma novidade relativamente a técnicas de resolução de problemas nesse período[21]. Na verdade, os humanistas não só incentivaram os estudos das matemáticas, como encontraram aí uma ferramenta supostamente mais apropriada à ciência do que a lógica aristotélica e suas “frivolidades”[22].

Muito antes de Bessarion disponibilizar sua biblioteca para a consulta dos intelectuais italianos, Giovanni Aurispa (1376 - 1459) viajou a Bizâncio, de onde levou centenas de códices gregos. Dentre as novidades, os manuscritos de Plotino, Iâmbico e Proclus, além de textos supostamente pertencentes a Arquimedes e um outro matemático

No entanto, o texto de Proclus não é claro se a inclusão é necessária por alguma suposta omissão de Euclides ou se a proposição já estaria contemplada no Postulado 1. Nos *Elementos,* esse princípio é explicitado pela primeira vez em I.4.

[20] O intercâmbio cultural entre Oriente e Ocidente já existia de outros tempos. De particular importância foi o XVIIº Concílio Ecumênico (Concílio de Basileia-Ferrara-Florença) entre os anos 1431-1449.

[21] Sobre a importância dos humanistas para o desenvolvimento da matemática moderna, ver Paul Lawrence Rose, Humanist Culture and Renaissance Mathematics: The Italian Libraries of the Quattrocento. *Studies in the Renaissance*, 20, 1973, p. 46–105.

[22] Ver Gilbert, *Renaissance concepts of method*, New York, 1960, p. 81.

antigo que Aurispa não soube identificar — tratava-se de Pappus de Alexandria[23]. Francesco Filelfo (1398 - 1481) lista entre os seus manuscritos as *Cônicas* de Apolônio[24]. Aliás, vale registrar que Filelfo faz uma das primeiras menções à tese heliocêntrica presente nos textos do astrônomo grego Aristarco de Samos[25]. Muitos outros manuscritos foram descobertos por diferentes eruditos[26]. Dentre os manuscritos dessa época estão versões dos *Elementos*, em grego e em latim, obras de Leonardo Fibonacci (*Liber Acaci* e *Practica geometricae*), assim como versões gregas do *Almagesto* e da *Geografia*, ambos de Ptolomeu[27]. Ao longo do século XVI, Giorgio Valla e Federico Commandino ajudariam a divulgar o conhecimento matemático antigo com traduções de Aristarco de Samos[28], Arquimedes[29], Herão de Alexandria[30], Apolônio e Pappus[31]; Cleômedes[32], Diofanto e Nicômedes também seriam traduzidos durante essa época.

Os manuscritos contendo a ciência matemática grega foram reunidos nas grandes bibliotecas da Itália. No tocante aos *Elementos*, a primeira missão do renascimento da matemática seria determinar qual versão era a mais fiel. Para tanto, era imperativo recorrer a

[23] Carta de Aurispa a Ambrogio Traversari (1386 – 1439), 27 de agosto de 1424.Ver *Carteggio di Giovanni Aurispa*. Roma, 1931.
[24] Traversari, Epistolae, II, cols. 1010-1011.
[25] Francesco Filelfo, *Mediolanensia Convivia,* aprox. 1443, 6v.
[26] Vários manuscritos desta época foram reunidos por eruditos associados ao filósofo bizantino Manuel Chrysoloras (aprox. 1350 – 1415), como Coluccio Salutati, Antonio Corbinelli e Palla Strozzi (1372 - 1462).
[27] Em 1451, Jorge de Trebizonda finalizou uma tradução, acompanhada de comentário, da *Sintaxis Mathematica* (ou *Almagesto*), de Ptolomeu. O trabalho foi patrocinado pelo Papa Nicolau V e usou um manuscrito da biblioteca de Basílio Bessarion. Em 1538 foi publicada uma versão francesa do comentário de Theon de Alexandria sobre o *Almagesto*. A *Geografia* de Ptolomeu estava sob posse de Palla Strozzi e foi adquirida pelo Duque Federico de Urbino, chegando, assim, às mãos de Federico Commandino. Ver Rose, *The Italian Renaissance of Mathematics: Studies on Humanists and Mathematicians from Petrarch to Galileo*, Genève, 1975, p. 41-42.
[28] Giorgio Valla e Federico Commandino, separadamente, publicaram traduções de *De magnitudinis et distantiis solis et lunae.* Convém lembrar que esse texto de Aristarco é a principal referência da tese heliocêntrica na Grécia Antiga. Ver Argante Ciocci, Federico Commandino and his Latin edition of Aristarchus's *On the Sizes and Distances of the Sun and the Moon*. *Archive for History of Exact Sciences,* v. 77, n. 1, p. 1-23, 2023.
[29] Por volta de 1450 Jacopo da San Cassiano Cremonensis traduz os textos de Arquimedes. Giorgio Valla foi um dos primeiros humanistas a se interessar por Arquimedes. Ele tinha acesso ao manuscrito de Moerbeke e provavelmente o de Jacopo; ademais, ele poderia usar o Comentário de Proclus, ao qual também tinha acesso, para tentar oferecer um contexto mais amplo das contribuições arquimedianas para além da construção de maquinários bélicos. Em 1503, Luca Gaurico publicou *Quadratura parabolae* e *Dimensio Circuli* (seguindo a tradução de Moerbeke). Em 1543, Tartaglia republicou essas traduções e acrescentou *De planorum aequilibriis e De Corporibus Fluitantibus,* Livro I. (também seguindo Moerbeke). Em 1560, Tartaglia publicou o Livro I de *De sphaera et cylindro* como o Livro III de *La quarta parte del general trattato*. A *editio princeps* dos textos arquimedianos foi publicada por Thomas Gechauff Venatorius (Basiléia, 1544). O texto grego foi acompanhado pela tradução latina de Jacopo. Em 1558 e 1565, Federico Commandino publicaria uma tradução parcial dos textos. Commandino publicaria uma tradução dos *Elementos* apenas em 1572. Ver Martin Frank, The Curious Case of QP. 6: The Reception of Archimedes' Mechanics by Federico Commandino and Guidobaldo dal Monte, *Revue d'histoire des sciences*, v. 68, n. 2, p. 419-446, 2015; Ciocci, A., Federico Commandino and the Latin edition of Apollonius's *Conics* (1566), *Archive for History of Exact Sciences*, p. 1-29, 2023.
[30] Commandino publicou uma tradução em 1575.
[31] Commandino publicou a Coleção de Pappus em 1588.
[32] *De motu circulari corporum caelestium* foi traduzido por Valla (Veneza, 1498).

Proclus, num contexto de franca ascensão do platonismo. A biblioteca com mais manuscritos era a Biblioteca Vaticana, cuja estrutura e coletânea pertenciam à biblioteca particular de Nicolau V (Tommaso Parentucelli, 1397 – 1455). Nicolau patrocinou vários humanistas, empregando muitos deles, como passaria a ser costumeiro, em secretarias e chancelarias, como no caso de Lorenzo Valla (1407 – 1457)[33], um dos mais ferrenhos opositores da lógica aristotélica. Nicolau V enviou emissários ao Oriente para ajudar a trazer intelectuais refugiados após a Queda de Constantinopla. O patrocínio papal às artes e aos humanistas continuou com Pio II (Enea Silvio Bartolomeo Piccolomini, 1405 – 1464) e Sixto IV (Francesco della Rovere, 1414 – 1484), que retomou e concluiu o estabelecimento da Biblioteca do Vaticano, escolhendo para curador Bartolomeo Platina. Entre o papado de Nicolau V e Sexto IV vários manuscritos foram incluídos, dentre os quais textos de Apolônio, Diofanto — que viria a ser traduzido e comentado por François Viète, considerado um dos fundadores da álgebra moderna —, Aristarco de Samos e o Manuscrito 190 dos *Elementos*, pertencente a uma tradição não-theonina desconhecida por Proclus. Manuscritos gregos de Herão e Papo seriam incluídos no século seguinte[34].

A nobreza italiana também teve papel importante no renascimento das matemáticas. Um dos mais importantes mecenas do renascimento italiano foi Cosimo di Giovanni de' Medici (1389 – 1464), que financiou a publicação de toda a obra de Platão, bem como a de Plotino e alguns textos de Proclus. Guidobaldo I de Montefeltro, Duque de Urbino, foi mecenas de Luca Pacioli, Federico Commandino e Guidobaldo del Monte[35]. Pacioli e Commandino publicaram traduções dos *Elementos*, ao passo que Guidobaldo del Monte traduziu Arquimedes. Outro nobre digno de destaque foi Alfonso, o Grande, Rei de Nápoles, que patrocinou George de Trebizonda, Chrysoloras e Lorenzo Valla.

A biblioteca de Bessarion, egresso de Bizâncio, continha manuscritos de quase todos os matemáticos gregos, a exceção sendo Pappus. Bassarion foi um dos grandes divulgadores do pensamento platônico durante a Renascença; ele vai reforçar em *In calumniatorem Platonis* que não se pode compreender Platão sem compreender as

[33] Valla também foi funcionário de Alfonso I da Sicília. Além do serviço puramente intelectual que colocavam a serviço dos seus respectivos mecenas, os humanistas também se prestavam ao ofício de logógrafos, o que era possível graças ao prestígio que gozavam junto às elites italianas. Valla é mais conhecido atualmente por refutar a autenticidade da Carta de doação de Constantino.

[34] Por outro lado, Paul Lawrence Rose afirma que uma nova política do Vaticano relativamente aos empréstimos de manuscritos, muito mais restritiva, dificultou o acesso de estudiosos aos manuscritos. No caso de Commandino, porém, o desconhecimento de alguns manuscritos no Vaticano se deve ao fato dele não ter arredado o pé de Urbino.

[35] Sobre a corte de Urbino, vide *Il Cortegiano*, livro de Baldessare Castiglione publicado em 1529.

matemáticas (e vice-versa). Bessarion possuía uma cópia dos comentários de Proclus[36]. A biblioteca de Giorgio Valla, em Piacenza, também continha manuscritos de Euclides (*Elementos* e *Dados*) e Proclus[37]. A biblioteca do duque Federico da Montefeltro de Urbino (1422 - 1482) era frequentada por Luca Pacioli e seu amigo mais famoso, Leonardo da Vinci; as traduções publicadas por Federico Commandino, dentre as quais uma versão bem recebida dos *Elementos*, usaram os manuscritos dessa biblioteca.

Há no século XVI uma abundância de novas versões dos *Elementos*, marcada pela disparidade entre elas[38] e por constantes intervenções no texto euclidiano, que podem ser classificadas em dois grupos: as filológicas e as filosóficas. As intervenções filológicas, como já esclarecido, pretenderam restabelecer uma versão fiel, ou o mais fiel possível, dos *Elementos*, o que exigiria comparações entre os vários manuscritos para que as interpolações fossem identificadas e eliminadas. Nesse particular, dever-se-ia usar como referência o comentário de Proclus. Os princípios que estivessem nos comentários de Proclus, mas não estivessem nos *Elementos*, ou vice-versa, passariam a ser considerados interpolações. Um bom exemplo no início da Modernidade é oferecido pelo matemático português Francisco de Melo (ca. 1490 - 1536), que deixou comentários a Euclides (*Ótica* e *Catóptrica*) e pseudo-Arquimedes. Diz ele:

> (...) [D]esde há já algum tempo, entre as obras completas de Euclides, Príncipe dos Matemáticos, lêem-se as suas *Especulária* [*Catóptrica*] e *Perspetiva* [*Ótica*], redigidas com admirável concisão e magnífica disposição, traduzidas para Latim pelo veneziano Bartolomeo Zamberto, com as demonstrações do distinto matemático Teão. Estas, contudo, estão tão confusas e mutiladas, seja por descuido dos copistas, seja por corrupção do códice grego, que penso que o próprio Teão não as reconheceria, se fosse vivo. Além disso, em nada contribuem para clarificar o entendimento dos teoremas matemáticos; pelo contrário, impedem completamente a interpretação destes se as tomares por base; [por isso] mais vale excogitar provas completamente novas, a atormentar o engenho excessivamente e durante muito tempo em tradições não fidedignas[39].

[36] Ainda há registros dos manuscritos que Commandino tomou emprestado da biblioteca de Bessarion. Ver Rose, Humanist Culture and Renaissance Mathematics: *The Italian Libraries of the Quattrocento*. Studies in the Renaissance, v. 20, 1973, p. 94.

[37] Esse catálogo foi comprado depois pela biblioteca Pio da Carpi; os códices gregos foram parar na Bibioteca Estense em Modena. A tradução de Bartolomeu Zamberti, de Veneza, vem daí. Sabe-se que Zamberti chegou a trabalhar numa tradução dos comentários de Proclus em 1539.

[38] Um levantamento bibliográfico das várias edições e traduções dos *Elementos* encontra-se em Riccardi, *Saggio di una bibliografia euclidea*, Bologna, 1887.

[39] Prefácio ao *Comentário à Perspectiva de Euclides*. Embora não seja um autor muito conhecido, uma vez que seus comentários foram praticamente dados como desaparecidos, Francisco de Melo gozou de amplo reconhecimento na Europa do séc. XVI, dentro e fora de Portugal. Gil Vicente refere-se a ele no prólogo do *Auto da Feira*, dando-lhe um destaque especial, como também o faz seu conterrâneo, o humanista André de Resende em *Oratio pro Rostris*, de 1534. Outro exemplo, desta vez na França, é o texto publicado por Pierre Forcadel em 1565, *Le premier livre d'Archimède, des choses également pesantes*. O texto, na verdade, é uma tradução do comentário de Francisco de Melo sobre a mesma obra atribuída falsamente a Arquimedes. Ver Francisco de Melo, *Obras matemáticas,* tradução de Bernardo Mota & Henrique Leitão, Lisboa, 2014.

As intervenções filosóficas, por outro lado, assumiram desde o início a missão de "corrigir" as "imperfeições" do próprio Euclides. Dentre essas imperfeições estariam a ausência de axiomas no Livro V, que contém a teoria das proporções, e nos Livros VII-IX, concernentes à aritmética; a ausência de demonstrações dos Postulados 4 e 5 (o das paralelas), como havia proposto Proclus; a ausência de axiomas relativos a interseção entre linhas, bem como novos axiomas de congruência e transposição de figuras. Alguns destes princípios antecipam axiomas contemporâneos, como, por exemplo, as relações de incidência e intersecção.

Os dois tipos de intervenção têm nos comentários de Proclus a principal referência sobre como o texto euclidiano deveria ser interpretado. Por outro lado, algumas das reconstruções dos *Elementos* tinham como objetivo responder aos desafios impostos por Proclus à adequação de Euclides ao modelo aristotélico de ciência. Essas reflexões — desconhecidas na Europa medieval, mas difundida entre matemáticos e filósofos árabes — foram retomadas na Renascença durante um momento de sistemática contestação do aristotelismo. O êxodo de intelectuais em direção à Europa ocidental após a queda de Constantinopla promoveria uma enorme transformação do ambiente acadêmico. Vários textos antigos considerados perdidos ou que só eram conhecidos através de traduções árabes ou fragmentos poderiam ser lidos na língua original. A chegada dos textos de Proclus e os de Euclides (agora no grego) coincide com a redescoberta das obras de Platão, Plotino, Epicuro (através do recém-descoberto texto de Diógenes Laércio), Lucrécio e Sexto Empírico, autores que ajudam a radicalizar as críticas já existentes à concepção aristotélica de ciência.

As objeções de Proclus abriram a possibilidade de uma crítica mais contundente à metodologia aristotélica a partir da disciplina que, a princípio, era a mais próxima das exigências estipuladas nos *Analíticos*: a geometria. Não obstante, a maioria dos comentadores de Euclides reivindicavam o pertencimento à tradição aristotélica. São exemplos Giorgio Valla, Bartolomeo Zamberti, Jacques Peletier du Mans, Cristóvão Clávio, Giuseppe Biancani, Conrad Dasypodius, Henry de Savile, Isaac Barrow e Alfonso Borelli. Todavia, esses autores não entendiam que fosse necessário fazer uma completa reconstrução do método inferencial usado na obra euclidiana através da exposição silogística de suas demonstrações. A recepção do texto de Proclus abriu um importante precedente para se considerar novos métodos nas ciências exatas, o que se nota nas versões dos *Elementos* publicados desde o século XVI.

1.3. Proclus e as versões modernas dos *Elementos*

Para dar conta dalgumas diferenças nos manuscritos euclidianos, a solução encontrada era confiar no *Comentário* de Proclus. Apesar de seu nome já ser conhecido na Europa desde o século XIII, graças às traduções de Guilherme de Moerbeke do *Tria opuscula*, *Elementatio theologica*, e dos comentários ao *Parmênides* e ao *Timeu* (apenas parte), foi só a partir do início da Era Moderna que Proclus foi consolidado como uma das principais autoridades antigas para aqueles que desejavam reabilitar o pensamento platônico, rejeitar a filosofia aristotélica, ou, como geralmente era o caso, as duas coisas, como Nicolau de Cusa, Basílio Bessarion, Marsilio Ficino (1433 – 1499), Giovanni Pico della Mirandola (1470 – 1533) e Francesco Patrizi (1529 – 1597)[40]. É nesse contexto que se deve pensar a recepção do *Comentário* ao Livro I dos *Elementos* de Euclides. Este texto tornou-se já no século XVI não só uma importante fonte de estudo sobre os *Elementos*, mas até mesmo a principal fonte historiográfica da matemática antiga, bem como uma referência para a filosofia da matemática de Platão, além de oferecer uma classificação das ciências matemáticas[41]. Com efeito, o texto de Proclus será comentado e traduzido, parcial ou integralmente, direta ou indiretamente, por nomes como o humanista Giorgio Valla, Dasypodius e Johannes Kepler[42]. De fato, Proclus seria lido também por Galileu e Descartes.

As primeiras edições completas dos *Elementos* em latim surgiram ao longo do século XII. Esta época é marcada pela redescoberta do conhecimento antigo através da tradução dos vários tratados árabes que passaram a circular na Europa a partir da Península Ibérica e do

---

[40] Diz-se que George Gemistus Pletho sugeriu a Cosimo de' Medici a criação da Academia Platônica em Florença. Cosimo, por sua vez, encarregou Marsilio Ficino da tradução da obra completa de Platão e Plotino. Assim sendo, em 1484 Marsilio Ficino publicou, através de Antonio Miscomini e com o financiamento de Lorenzo de' Medici, a *editio princeps* dos diálogos de Platão. Em 1492, foi publicada a tradução latina da *Enéadas* de Plotino. A pedido de Nicolau de Cusa, Pietro Balbi traduziu pela primeira vez *Theologia platonica*, de Proclus. Um dos principais livros de Ficino tem como título *Theologia platonica de immortalitate animorum* (1482) Ainda sobre textos de Proclus traduzidos, Paolo Beni (1552 - 1625), traduziu partes do *Comentário ao Timeu*. Uma nova tradução é publicada por Nicolaus Scutellius (1490 - 1542), que também traduz no período os *Comentários ao Parmênides*, ao *Primeiro Alcibíades* e à *República*.

[41] Há ainda dois manuscritos não mencionados por Morrow que contêm traduções integrais do Comentário de Proclus e antecedem o texto de Barozzi: o de Zamberti, o de Giovanni Battista Gabia e o de Jerónimo Muñoz. Sobre a recepção deste texto, ver Álvaro José Campillo Bo. The Forgotten Gifts of Hermes: The Latin Reception of Proclus' *Commentary on Euclid's Elements*. *Mediterranea. International Journal on the Transfer of Knowledge* 8, p. 193-278, 2023.

[42] Kepler, *Harmonices mundi libri V*, 1619. Nessa obra, Proclus é mais citado do que Platão e Plotino. Vide, em espacial, citações a Proclus nos Livros I, III e IV. A respeito da influência de Proclus sobre Kepler, ver Guy Claessens, Imagination as self-knowledge: Kepler on Proclus' *Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, *Early Science and Medicine*, 16/3 (2011), p. 179 – 199; do mesmo autor, Reception and the Textuality of History: Ramus and Kepler on Proclus' History and Philosophy of Geometry, in André Lardinois et al (eds.), *Texts, Transmissions, Receptions: Modern Approaches to Narratives*, Leiden, 2015, p.281–294. Ver também Wolfgang Osterhage, *Johannes Kepler: The Order of Things*, Springer, Dordrecht, 2020.

reino normando da Sicília[43]. Até 1482, quando Erhard Ratdolt publica a primeira versão impressa dos *Elementos* — duas outras edições aparecem em 1486 (Ulm) e 1491 (Basiléia) —, a obra euclidiana circulou na Europa ocidental em pelo menos quatro versões. A primeira delas é atribuída a Adelardo de Bath, de aproximadamente 1120. Essa tradução vem do texto árabe de Al-Nairizi[44] e abrange três versões, chamadas simplesmente Versões I[45], II[46] e III[47].

[43] O texto de Euclides foi enviado de Constantinopla para o Califado Abássida em Bagdá no século IX. A primeira fonte de informações sobre as traduções árabes é o *Catálogo* de al-Nadim. Segundo ele, os *Elementos* viria a receber duas traduções por al-Hajjāj Ibn Yūsuf Ibn Matar (f. 786 – 830). Especula-se que as primeiras edições medievais latinas, especialmente as de Abelardo, e hebraicas dos *Elementos* tomaram por base o texto de al-Hajjaj. Vale a pena acrescentar que al-Hajjaj foi também o responsável pela primeira tradução do *Sintaxis Mathematica* de Ptolomeu, obra conhecida pelo título *Almagesto* em razão da tradução árabe. Ao longo da segunda metade do século IX surgiu uma nova tradução, desta vez preparada por Ishāq Ibn Hunayn (809 – 873) e revisada por Thabit Ibn Qurra (c. 830 - 901). al-Nadim não explica os motivos de uma nova tradução em tão curto espaço de tempo. De acordo com Sonja Brentjes, a chamada tradição Ishaq/Thabit viria a exercer uma influência mais profunda na agenda investigativa da matemática muçulmana medieval. O texto preparado por Gerardo da Cremona segue esta tradição. Ao final do século XIII aparecem duas traduções do polímata persa Nasir al-Din al-Tusi (1201 - 1274). O que destaca essas traduções em relação às duas outras do século IX, segundo Sonja Brentjes, é que al-Tusi não se importou em ser fiel ao texto de Euclides, seja em relação à linguagem usada, seja na maneira de expor as demonstrações. Na maioria das vezes, as demonstrações de al-Tusi são abreviadas; há também o acréscimo de novos raciocínios, de novas definições e novos lemas. Não se trataria, portanto, de apenas um *scholium*. Como Brentjes nota, esse procedimento não se mostra compatível com a recepção dos clássicos na Idade Média, contudo pouco se discute acerca das motivações de tamanhas modificações. Seja como for, o texto de al-Tusi não parece ter alcançado a Europa durante a Idade Média, mas seria publicado através da imprensa dos Médici no século XVI. Nasir al-Din al-Tusi deixou também traduções de Arquimedes, Ptolomeu e Autólico. Ver Sonja Brentjes, Arabic and Arabo-Latin Translations of Euclid's *Elements*, In G. W. Most, D. Schäfer, & M. Söderblom Saarela (Eds.), *Plurilingualism in Traditional Eurasian Scholarship: Thinking in Many Tongues*, Leiden, p. 376-387, 2023. Ver também Richard Lorch, "Greek-Arabic-Latin: The Transmission of Mathematical Texts in the Middle Ages", *Science in Context,* 2002. Sobre a importância filosófica da tradição árabe de comentários e traduções, ver Marco Aurélio Oliveira da Silva, Alberto Magno e a recepção arabo-latina de Euclides. *Dois Pontos*, v. 18, n. 1, 2021.

[44] Para essa exposição, adota-se Marshall Clagett, The medieval Latin translations from the Arabic of the *Elements* of Euclid, with special emphasis on the versions of Adelard of Bath, *Isis*, v. 44, n. 1/2, p. 16-42, 1953. Como nota Clagett, a Versão I, seria o resultado da tradução (quase) ao pé da letra duma das primeiras versões árabes do texto euclidiano, a de al-Hajjaj, e foi compilada aproximadamente entre 1126 e 1130. Essa opinião é compartilhada por Busard, responsável pela atual edição crítica da Versão I. Ver H. L. L. Busard (Ed.), *The First Latin Translation of Euclid's Elements commonly ascribed to Adelard of Bath. Books I-VIII and Books X.36-XV.2*, Toronto, 1983. A imprensa dos Médici (*Typographia Medicea*, posteriormente *Typographia linguarum externarum*), fundada em Roma por Ferdinando de' Medici (1549–1609) em 1584, e desde então sob a direção de Giambattista Raimondi (1536 – 1614), teve um papel importante de divulgação de tratados científicos em árabe ao mesmo tempo que tentou divulgar o cristianismo em outras línguas. Dentre esses escritos científicos encontra-se uma versão árabe dos *Elementos* preparada por Nasir al-Din al-Tusi. Esta obra, além dos comentários de Proclus e os de Simplício, ajudariam a fixar uma literatura de fundamental importância para discussão do Postulado das Paralelas (Postulado 5 na edição de Heiberg). Em 1651 Edward Pocock preparou uma tradução para o latim do texto de Nasīr ad-Dīn. O texto foi publicado por John Wallis em *De Postulato Quinto et Definitione Quinta Libri 6 Euclidis Disceptatio geometrica* (In: *Opera mathematica*, 1693, vol. 2, p. 665-678). Raimondi também deixaria suas contribuições com as traduções dos *Dados* de Euclides, das *Cônicas* de Apolônio (a partir dum texto árabe), e da *Coleção matemática* de Pappus. Outros autores publicados incluem Mohammed al-Idrisi, Avicena, Agostinho e Gregorio Nuñez Coronel. Ver Caren Reimann, Ferdinando de'Medici and the Typographia Medicea, In Nina Lamal, Jamie Cumby, & Helmer J. Helmers, *Print and Power in Early Modern Europe (1500–1800)*. Leiden, 2021. p. 220-238.

[45] Ver H. L. L. Busard (Ed.), *The First Latin Translation of Euclid's Elements commonly ascribed to Adelard of Bath. Books I-VIII and Books X.36-XV.2*, Toronto, 1983.

[46] Ver H. L. L. Busard & & M. Folkerts (Eds.), *Robert of Chester's Redaction of Euclid's Elements, the so-called Adelard II Version*, 2 Vols, Berlin, 1992

[47] H. L. L. Busard (Ed.), *Johannes de Tinemue's redaction of Euclid's Elements, the so-called Adelard III version*, 2 Vols., Stuttgart, 2001.

Com exceção dalgumas divergências gramaticais em relação ao texto de Heiberg, as Versões I, II e III contêm o mesmo número de definições no Livro I — 23. A quantidade de postulados também é a mesma, mas com duas diferenças. A primeira delas é que o Postulado 2 é incorporado no 1. A segunda alteração, por conseguinte, é a introdução de um novo postulado, a saber, que duas retas não encerram um plano. Conforme se acompanha os comentários de Proclus, é possível perceber que esta proposição figurava na lista de noções comuns que ele tinha à disposição. Em relação a esta lista, convém notar que a Versão I incorporou as três proposições que Proclus havia rechaçado: a 4ª, 5ª e a 6ª. O fato de Adelardo não ter se pronunciado sobre isso sugere que tais interpolações já estavam presentes no texto de al-Hajjaj. Em relação às demonstrações, a Versão I explicitamente separa o preâmbulo construtivo, i.e., as etapas do enunciado à construção, aparecendo em seu lugar a locução *Exempli gratia*, da demonstração (*Rationis causa*). Esta separação parece servir apenas a propósitos didáticos ou expositivos, uma vez que o raciocínio é basicamente o mesmo que o de Euclides no texto de Heiberg.

A Versão II traz formulações distintas dos enunciados e das demonstrações. O diferencial desta versão é o fato de seu autor ter preferido dar apenas os resumos das demonstrações euclidianas. Seria de se supor que a audiência deste texto era mais qualificada para reconstruir a demonstração completa se lhe fosse requerido[48]. A Versão III assemelha-se mais a um comentário do que a uma tradução propriamente dita. O autor dessa versão cita explicitamente a Versão II, o que sugere que os princípios e enunciados desta se basearam naquela[49]. O autor desta versão vai além de seus predecessores ao acrescentar uma série de apontamentos ao longo da obra, além de tê-la propriamente prefaciado. Nota-se também uma maior preocupação em distinguir as partes das demonstrações: *propositio*, *exemplum*, *dispositio* e *ratio*, e *conclusio*. Isso foi feito de maneira incipiente na Versão I.

Gerardo de Cremona (1114 - 1187) traduziu os quinze livros dos *Elementos* até então atribuídos a Euclides (os XIV e XV são apócrifos) e os *Data*[50]. Depois destes, aparece a tradução de Campano da Novara. A edição preparada por Campano da Novara, de 1259,

[48] Curiosamente, a Versão II, segundo Busard, tornou-se a mais popular dentre as traduções dos *Elementos* produzidas no século XII e, ao que tudo indica, fora a mais estudada nos centros intelectuais; seus enunciados proveram o esqueleto de vários e diferentes comentários, dos quais o mais celebrado foi o de Campano da Novara, composto no terceiro quarto do século XIII. Ver Busard, *Op. cit.*, p. 6.

[49] E embora a Versão III tenha aparecido depois das I e II e esteja associada ao nome de Abelardo, como o autor faz questão de assinalar (*ab Adelardum Bathoniensem ex arabico in latinum translatus*), sua autoria ainda é objeto de disputa entre estudiosos.

[50] Essa tradução foi descoberta por Axel Anthon Björnbo em 1904. Este texto parece basear-se na edição crítica de Thabit ibn Qurra com uma comparação com outros manuscritos. Gerardo de Cremona também traduziu o comentário de Al-Nairizi ao Livro I dos *Elementos*. Este texto foi descoberto por Maximilian Curtze e publicado em 1899 sob o título *Elementorum Euclidis commentarii ex interpretatione Gherardi Cremonensis*.

possivelmente baseou-se na Versão II atribuída a Abelardo, especialmente na escolha dos princípios, mas segue um caminho completamente distinto quando se trata das demonstrações. Enquanto a Versão II opta por demonstrações breves, Campano expõe a demonstração completa de Euclides mais ou menos como nos manuscritos usados por Heiberg. O texto preparado por Campano tornou-se muito popular nas universidades medievais, sendo o principal acesso aos *Elementos* até o século XVI. Há notícias de uma tradução direta do grego já no século XII. A existência deste texto só foi confirmada na década de 1960 por J. E. Murdoch, o qual conseguiu até mesmo precisar a data de sua redação: 1165. Das versões do texto euclidiano disponíveis no Medioevo, esta é a mais próxima dos manuscritos usados na edição crítica de Heiberg, especialmente no número e formulação dos princípios; a divisão dos Postulados 1 e 2, por exemplo, é retomada aqui.

A abundância de versões dos *Elementos* no século XVI se explica pela disponibilidade de manuscritos gregos vindos de Constantinopla em direção à Península Itálica, somados a outras traduções feitas das línguas árabe e persa nos séculos XII e XIII. Dos manuscritos reunidos nas grandes bibliotecas da Itália emergiram três listas de princípios nas edições dos *Elementos*. A primeira delas é a de Campano, publicada em 1482 por Erhard Ratdolt[51]. O sistema axiomático da edição de Campano contém 16 princípios geométricos e 14 princípios aritméticos[52]. Esta tradução serviu de base para Luca Pacioli, Wilhelm Xylander, Rodrigo Zamorano, Pierre Forcadel, Henry Billingsley e Dou. As duas próximas edições vêm do grego. A de Giorgio Valla (1447-1500)[53], que aparece pela primeira vez na obra póstuma *De fugiendis et expetendis rebu*, de 1501[54], sem a inclusão das demonstrações[55]. Esse sistema axiomático foi popularizado pelo herdeiro intelectual de Valla, Bartolomeo Zamberti

[51] Campano da Novara, *Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi, in artem geometrie incipit quamfoelicissime*, Venezia, Ratdolt, 1482.

[52] Esses princípios aritméticos foram extraídos do livro *Arithmetica*, escrito por Jordanus de Nemore (1225-1260).

[53] Valla foi discípulo de Constantine Lascaris, um dos vários refugiados de Constantinopla. O interesse de Valla abrangia praticamente todos os temas conhecidos até então. Ele comentou Cícero (*De fato* e *Topica*) e Juvenal (*Sátiras*). Dentre os tratados científicos, além de Euclides, destacam-se Aristarco de Samos (*De magnitudinis et distantiis solis et lunae*), Hypsicle (*Interpretatio libri decimi Elementorum Euclidis/Disputatio de dodecaedro et icosaedro e Elementorum quartus decimus liber*), Proclus (*De astrolabio*); Galeno (*De bono corporis habitu, De inaequali distemperantia, De febribus, Praesagium experientia confirmatum Galeni, De succidaneis*); Cleônides, *De musica* (*Harmonicum introductorium*, 1497). Consta também traduções de Aristóteles: *De caelo et mundo, Ars poetica* e *Magna Moralia*. Valla ainda publicou um pequeno manual de argumentação, o *Libellus de argumentis* (ou *Ratio argumentandi*).

[54] Giorgio Valla, *De expetendis et fugiendis rerum opus, Venezia*, Manuzio, 1501.

[55] Valla acreditava que as demonstrações nos *Elementos* eram de Theon, não de Euclides. Essa era a mesma opinião de Petrus Ramus. Bernard Lamy vai ainda mais longe e atribui a Proclus a verdadeira autoria das demonstrações. Ver Lamy, *Les Elemens de Geometrie*, 1685, Prefácio.

(1473–1543)[56]. Chamaremos essa versão de Valla-Zamberti. A primeira edição (*editio princips*) do texto grego euclidiano é a do alemão Simon Grynaeus (1493 – 1541)[57], de 1533. Ao texto de Euclides é anexado o comentário de Proclus. Em 1560 a obra foi traduzida para o latim e publicada por Francesco Barozzi[58].

Paralelamente ao renascimento das matemáticas ocorreu o renascimento do pensamento platônico. Proclus, que já era conhecido desde a Idade Média, serviria de ponte entre esses dois episódios. E isso se refletiu na maneira como os *Elementos* passou a ser interpretado e modificado.

1.4. Retórica e a crise do método aristotélico

O comentário de Proclus fornece um relato cronológico da matemática grega, embora de segunda mão, realçando as contribuições de Platão em detrimento de quaisquer nomes do Liceu. O texto de Proclus também colocou à disposição dos filósofos e matemáticos do século XVI uma série de questões e problemas concernentes aos princípios euclidianos: que era preciso verbalizar proposições que Euclides admitia tacitamente; que somente definições e axiomas eram indemonstráveis, ou seja, que os postulados, segundo ele, em uma leitura de Aristóteles, poderiam ser reduzidos às definições. Além disso, Proclus esteve no centro da polêmica conhecida como "questão da certeza matemática" (*quaestio de certitudine mathematicarum*), em cujo cerne estava uma disputa a respeito da cientificidade das matemáticas. Diante desse desafio, que se somava às críticas já existentes à silogística, alguns comentadores de Euclides passaram a considerar as suas demonstrações sob a perspectiva retórica a partir do conceito de entimema.

A influência de Proclus já é percebida em Giorgio Valla (*De fugiendis et expetendis rebu*, Livro I, Capítulos, XIV-XXIII). "Deve-se lembrar", diz ele, "como dissemos frequentemente, que o matemático deve ocupar um lugar intermediário entre as coisas

[56] Bartolomeo Zamberti, *Euclidis megarensis philosophi platonici Mathematicarum disciplinarum Janitoris: Habent in hoc volumine quicumque ad mathematicam substantiam aspirant: elementorum libros XIII. cum expositione Theonis*, Venezia, Tacuino, 1505.

[57] Simon Grynaeus, Εὐκλείδου Στοικείων, Basel, 1533. Grynaeus foi aluno de Philip Melanchthon, erudito que deixou uma versão dos *Elementos*. Grynaeus foi professor de latim e grego em Heidelberg, de onde saiu para Basiléia em 1529 para substituir Erasmo. Como teólogo, Grynaeus esteve ao lado da Reforma Protestante, tendo envolvimento na Confissão Helvética, bem como na Conferência de Worms em 1540. Além de boas relações com Erasmo, Grynaeus foi amigo de João Calvino. Grynaeus reorganizou Tübingen como uma universidade protestante entre 1534 e 1535.

[58] Francesco Barozzi, *Procli Diadochi Lycii philosophi platonici ac matematici probatissimi in primum Euclidis Elementorum librum commentariorumad universam mathematicam disciplinam principium eruditionis tradentium libri IIII*, Patauii, excudebat Gratiosus Perchacinus, 1560.

intelectuais e sensíveis e, às vezes, representar imagens das coisas divinas e, às vezes, lembrar os exemplos das coisas naturais"[59]. Apesar da tese sobre a natureza intermediária das matemáticas não ser uma novidade entre os antigos, especialmente no platonismo tardio, Proclus se destaca por associar ao conhecimento matemático a imaginação (*phantasia*), que também seria um faculdade intermediária entre a sensibilidade e o intelecto. A imaginação matemática desempenha um papel importante na filosofia de Clávio.

A doutrina da natureza intermediária das matemáticas, especialmente a geometria, será adotada por quase todos os comentadores de Euclides doravante. E quase sempre com referência a Proclus. Bartolomeo Zamberti, por exemplo, afirma o seguinte em sua tradução dos *Elementos*:

> Como declara Proclus Diadochus, as disciplinas matemáticas estão situadas na alma. Se forem consideradas intelectualmente, então carecem completamente de qualquer matéria; mas se quisermos percorrê-las pelos sentidos, então é necessário que estejam sujeitas à matéria. Portanto, por esse meio, podemos avançar das [ciências] físicas, ou seja, aquilo que diz respeito à natureza, até a metafísica, ou seja, o que está além da natureza [*transnaturalia*][60].

Mencionamos, por fim, uma das traduções mais famosas dos *Elementos* do século XVI, a de Federico Commandino, publicada em 1572[61]. Ao longo do Prolegomena, i.e., a introdução geral, Commandino consegue tecer uma trama cronológica sobre a origem da geometria e sua relação com a Academia. Graças a isso ele consegue desfazer duas confusões: que o autor dos *Elementos* era Euclides de Megara, contemporâneo de Platão[62], e que Theon de Alexandria, responsável pela edição dos *Elementos* na Antiguidade, teria sido o autor das demonstrações euclidianas. Até aquela data não havia consenso sobre a correta cronologia dos *Elementos*. Da identificação entre Euclides, o geômetra, e Euclides de Megara se seguia a

---

[59] Valla, *De fugiendis et expetendis rebu,* Livro I, Capítulo XX: Meminisse aut nos ut sæpe diximus oportet mathematicen mediú tenere locum inter intellectilia senfiliaq et aliquádo diuinaru rea exprimere imagines aliquádo re naturalium exepla cómonere. Ver também Livro X, Capítulo I. Proclus é citado nominalmente algumas vezes.

[60] Zamberti, *Euclidis megarensis philosophi platonici Mathematicarum disciplinarum Janitoris*, Venezia, 1505, f. 4r: Nam disciplinae mathematicae in anima positae, ut Proclus inquit Diadochus, si intellectu cogitentur, tunc omni prorsus materia carent, at si volumus ipsas sensibus percurrere, materiae subiaceant necesse est. Hoc igitur medio a physicis, hoc est a naturalibus, usque ad metaphysicam, hoc est transnaturalia, penetrare possumus.

[61] Commandino, *Euclidis Elementorum libri XV, una cum scholiis antiquis*, 1572.

[62] Essa confusão está presente na maioria das traduções e edições dos *Elementos* no século XVI. Alguns autores como Bessarion afirmava, sem nenhuma evidência documental, que Platão teria ido a Megara para tomar lições de geometria com Euclides. Ver Bessarion, *In calumniatorem Platonis*, Livro I, p. 11r: Neminem esse intromittendum qui virtute ex geometrica mediocritate quaesitam non fecit cofecutus Megaram quoque et Cyrenen quem admodum supradiximus profectum esse Platonem constat ut illic Euclide summum geometram hic Theodorum inter mathematicos praestantissimum audiret.

crença de que Aristóteles imitou a geometria euclidiana ao desenvolver sua doutrina da ciência demonstrativa.

Para os aristotélicos, seria preciso indicar que Aristóteles deixou muita coisa escrita sobre as matemáticas; se isso não fosse bastante para retirar de Platão e dos platonistas o monopólio sobre o assunto, ao menos evitaria que Aristóteles fosse considerado um completo boçal sobre geometria e aritmética. Foi com esse intuito que Petrus Catena (1501-1577) escreveu *Universa loca in logicam Aristotelis in mathematicas disciplinas hoc novum opus declarat* (Veneza, 1556). Outra tendência da época foram os exemplos matemáticos usados em comentários aos textos de Aristóteles. Mais importante que isso, porém, era reforçar que somente à luz dos *Analíticos posteriores* se poderia explicar os *Elementos*, como afirma Dasypodius no prefácio da tradução dos *Elementos* de 1564.

As axiomatizações dos *Elementos* de Euclides nos séculos XVI e XVII dão-se no âmbito da ciência demonstrativa aristotélica. Durante esse período, o texto euclidiano foi modificado várias vezes: primeiro, por questões filológicas decorrentes da comparação dos vários manuscritos; depois, por influência de Proclus a respeito dos critérios de admissibilidade dos princípios usados por Euclides, bem como a necessidade de incluir novos axiomas. Apesar da referência constante aos *Analíticos posteriores* de Aristóteles, essas axiomatizações não pretendiam analisar os argumentos de Euclides na forma lógica dos silogismos. Além disso, mesmo quando os novos axiomas introduzidos tratavam de atributos e relações extraídas dos diagramas, não se seguia daí uma dispensabilidade diagramática. Isso posto, esclarecemos a seguir o caminho percorrido por esta Tese.

No Capítulo 2 fazemos uma apresentação dos *Elementos*, com especial atenção à suposta prática matemática engendrada por esta obra. Esse capítulo também serve para fazer as primeiras comparações entre os princípios euclidianos e os aristotélicos. A principal divergência entre Euclides e Aristóteles, como já antecipado, reside no uso sistemático de diagramas nos *Elementos*. Mostramos de que maneira a coordenação entre texto e diagrama ajuda a explicar o método construtivo empregado na resolução de problemas geométricos. Nesse particular, considera-se a resposta de Kenneth Manders, segundo o qual o uso dos diagramas é regrado graças à prática matemática subjacente. Com isso será possível apontar para os equívocos nas críticas contemporâneas a Euclides. Esse capítulo também procura ajustar a abordagem historiográfica à matemática grega ao destacar a importância da resolução de problemas. De fato, argumentamos que não se poderia conceber os *Elementos* sem considerar a resolução de problemas como central para o conhecimento geométrico. Encerramos o capítulo com uma discussão preliminar sobre a fundamentação matemática.

Apesar de Aristóteles definir demonstração como um tipo de silogismo, não parece que sua obra permite atribuir a ele uma concepção de demonstração puramente linguística, como será o caso a partir do século XIX. Não obstante, a tese segundo a qual o discurso científico pode ser analisado a partir de reconstruções silogísticas aponta para algo original de Aristóteles, uma vez que os registros de sua época mostram que os raciocínios matemáticos dependiam muito do diagrama. A partir desse entendimento, o Capítulo 3 compara o método inferencial euclidiano e o método axiomático-formal hilbertiano como forma de salientar os aspectos filosóficos por trás de uma definição linguística de demonstração. Mostra-se que para Aristóteles uma demonstração não se limita apenas a derivação de teoremas; espera-se também que uma demonstração satisfaça requisitos epistemológicos.

Os Capítulos 2 e 3 encerram o núcleo temático lógico-linguístico desta Tese. Discutimos aí, em primeiro lugar, o pertencimento dos *Elementos* à tradição aristotélica de conhecimento demonstrativo e se se pode extrair dos *Analíticos* uma concepção lógico-linguística de demonstração. Discutimos também, em segundo lugar, se a geometria contemporânea, representada pelo método axiomático-formal de Hilbert, se aproxima desse ideal de ciência demonstrativa. Em ambos os casos, são flagrantes as diferenças em relação a Euclides, quer seja nos tipos de princípios adotados, quer seja na linguagem empregada, quer seja no modo de apresentação, quer seja, em especial, no método inferencial baseado em diagramas.

O Capítulo 4 explora a proposta de A. Lassalle Casanave & M. Panza sobre como Euclides utiliza o Postulado 2, abordando o caráter retórico presente nesse processo. Nos últimos anos, diversos autores têm enfatizado a importância de reavaliar as demonstrações matemáticas no contexto das práticas argumentativas em que são utilizadas. Em vez de se ater rigidamente à concepção ideal de demonstração do modelo clássico, a sugestão é considerar também as demonstrações reais, independentemente de quaisquer preconceitos filosóficos. Essa abordagem poderia ser aplicada a Euclides e o uso de diagramas. Assim, compreender a estabilidade epistemológica dos *Elementos* requer uma compreensão da prática matemática subjacente a essa obra, bem como a legitimidade das representações utilizadas. Essa nova perspectiva não busca desvalorizar a análise lógica; ao contrário, aponta para uma maneira de adquirir conhecimento matemático por meio de representações linguísticas e diagramáticas. Em comparação com a doutrina aristotélica da ciência demonstrativa discutida no Capítulo 2 e o método axiomático-formal de Hilbert apresentado no Capítulo 3, a análise retórica de Lassalle Casanave & Panza apresenta a vantagem de preservar a natureza heterogênea das demonstrações euclidianas. Isso não implica que o fato de um entimema ser dependente da audiência sua validade também o seja.

No entanto, essa não seria a primeira ocasião em que a retórica foi considerada como uma alternativa ao método lógico. Durante os séculos XVI e XVII, diversos comentaristas da obra euclidiana adotaram a retórica clássica como uma abordagem para explicar e até mesmo defender o estilo utilizado por Euclides. No Capítulo 5, examinamos como a convergência entre a retórica e a matemática está diretamente relacionada a dois momentos cruciais no pensamento aristotélico em relação à matemática: a rejeição sistemática da silogística e a questão da certeza nas disciplinas matemáticas (*quaestio de certitudine mathematicarum*).

Quando revisitamos a discussão sobre o modelo clássico de ciência, analisamos as condições lógicas e epistemológicas estabelecidas por Aristóteles nos *Analíticos Posteriores*, dando uma atenção especial ao conceito de causa e à maneira como as demonstrações matemáticas poderiam ser consideradas causais. A comparação entre Euclides e Aristóteles, que foi abordada no Capítulo 2, serve como uma introdução às objeções levantadas por Proclus sobre a inadequação da silogística para argumentos euclidianos. Estas objeções estavam, em grande medida, relacionadas ao conceito de causa. A recepção das ideias de Proclus desempenhou um papel fundamental na provocação de Alessandro Piccolomini, que trouxe à tona a questão da certeza nas disciplinas matemáticas.

Neste contexto, apresentamos as respostas fornecidas por Cristóvão Clávio e Giuseppe Biancani. Para Clávio, o desafio levantado por Piccolomini em relação à natureza causal das demonstrações matemáticas era particularmente relevante, pois poderia questionar o lugar da geometria dentro do currículo jesuíta. Embora ambos aderissem ao modelo clássico de ciência, Clávio e Biancani concordavam que, normalmente, os matemáticos não se dedicavam a explicitar a forma lógica de seus argumentos, optando pela brevidade na maioria das situações. Foi em resposta ao desafio de Piccolomini que esses autores passaram a conceber as demonstrações euclidianas como entimemáticas. No entanto, é importante notar que, embora esses autores não tenham expressado objeções aos diagramas — na verdade, as reconstruções silogísticas presumiam a presença desses artefatos —, eles compartilhavam a visão de que as demonstrações eram discursivas.

O desafio lançado por Piccolomini sobre o caráter científico das matemáticas ajuda a compreender os esforços de autores como Clávio e Biancani, no século XVI, bem como Isaac Barrow, no XVII, em mostrar a adequação de Euclides a Aristóteles. Porém, seria um erro pensar que tal adequação pressupunha uma reconstrução silogística das demonstrações euclidianas e, por conseguinte, a dispensabilidade de diagramas.

No Capítulo 6, abordamos o método de sobreposição como um estudo de caso. A reconstrução axiomática dos *Elementos* não foi motivada apenas pela necessidade de correção filológica. Além disso, esse episódio não se limita à recepção das ideias de Proclus, pois muitos dos novos axiomas introduzidos sequer foram mencionados por ele. Isso é evidente nos casos dos axiomas de congruência e transposição de figuras, que serão examinados aqui. No centro dessa axiomatização estava o debate sobre a validade matemática do método de sobreposição. Esse debate começou com os comentadores árabes de Euclides e perdurou até o século XX, envolvendo figuras notáveis, como Bolzano, Hilbert, o qual deu a solução mais famosa, embora não original, ao problema, e Russell. Até onde se tem registro, Jacques Peletier foi o primeiro crítico do método de sobreposição na era moderna. Suas objeções permaneceram dentro do contexto conceitual fornecido pelo modelo clássico de ciência. Os principais opositores de Peletier, como Clávio, Biancani, Saville e Barrow, também compartilharam dessa perspectiva. No entanto, ao contrário das soluções que viriam a ser buscadas na geometria contemporânea, ambos os lados reconheciam que a prática matemática euclidiana demandava considerações sobre o papel da imaginação (*phantasia*) e dos entimemas. Isso parece refletir a persistente influência da retórica, apesar de Peletier, por exemplo, ainda descrever a demonstração como um silogismo, sugerindo que ele via na retórica uma alternativa metodológica válida.

No Capítulo 7, nosso foco é um estudo sobre a incorporação de novos axiomas de interseção e a introdução do conceito de espaço matemático. É importante notar que, embora na filosofia da matemática contemporânea os axiomas desse tipo sejam considerados como uma maneira de eliminar a necessidade de diagramas, essa não era a principal preocupação nos séculos XVI e XVII. Autores como Oronce Finé e Claude Richard ocasionalmente utilizavam axiomas de intersecção em algumas proposições, mas não de forma sistemática, o que mantinha a relevância do Postulado 2.

A mudança mais revolucionária dessa época ocorreu com Patrizi, que introduziu o conceito de espaço infinito na geometria euclidiana. Dentro das axiomatizações da geometria euclidiana, as inovações filosóficas de Patrizi são notáveis. Primeiramente, ele alterou o objeto central dessa disciplina: em vez das magnitudes contínuas, como a maioria dos comentaristas de Euclides desde Proclus, Patrizi definiu a geometria como a ciência do espaço puro. Em segundo lugar, ele rejeitou completamente o conceito de *phantasia* matemática, que havia sido herdado de Proclus e utilizado por Peletier e Clávio para explicar referências ao movimento nas definições e teoremas. Essas mudanças filosóficas tiveram um impacto direto na prática matemática. Patrizi eliminou os postulados de construção, uma vez que o objeto da geometria era considerado pré-dado, deixando para o geômetra apenas a tarefa de demonstrar. Isso resultou na geometria patriziana não distinguir entre uma linguagem operativa (ou normativa) e uma linguagem descritiva (ou teórica). Além disso, não havia mais referências aos diagramas. A axiomatização de Patrizi se afastou significativamente do modelo clássico de ciência, pelo menos em relação aos objetos matemáticos. Por fim, é possível observar como essa nova definição está relacionada às críticas de Patrizi à retórica.

2. *Os Elementos* de Euclides

2.1. Resumo do capítulo

São apresentados neste capítulo os principais aspectos dos *Elementos* de Euclides, com especial atenção aos Livros I-VI. À luz do *Comentário* de Proclus, o qual faz referência aos *Analíticos posteriores* de Aristóteles, será discutida a tese segundo a qual alguns princípios euclidianos não são indemonstráveis. Essa tese será resgatada durante a recepção da matemática grega na Europa entre os séculos XV e XVII. Além disso, este capítulo procura inserir a geometria euclidiana num contexto mais amplo da tradição grega de busca e elaboração de métodos para a resolução de problemas matemáticos. Por essa razão, será considerada ao fim como o uso dos diagramas seria legítimo sob o ponto de vista dessa prática matemática.

2.2. Introdução

Euclides abre o Livro I dos *Elementos* com a explicitação de três tipos de primeiros princípios: as definições, os postulados, e as noções comuns[63]. E só. O leitor não encontra nenhuma epístola dedicatória, tais como as de Arquimedes, Apolônio ou Pappus de Alexandria, nenhum prefácio contendo as intenções do autor, tampouco alguma nota de esclarecimento junto às demonstrações. De fato, pouca coisa é sabida sobre Euclides. A primeira menção a seu nome é feita por Arquimedes, o que sugere que o autor dos *Elementos* viveu no século III a.C, provavelmente sob o reinado Ptolomeu I Sóter em Alexandria. Por essa razão, dada a escassez de registros escritos sobre a matemática grega pré-euclidiana, não há como saber se era comum o hábito de formular princípios antes de tratados matemáticos, quais tipos e qual nomenclatura mais comum, se havia algum esforço de padronização, etc[64]. Sabe-se tanto quanto isso a respeito de suas demonstrações e o uso de diagramas.

[63] Com exceção dos Livros VIII-IX e XII-XIII, os demais são prefaciados por uma lista de definições relativas aos entes matemáticos sob investigação. Nos manuscritos mais antigos, aqueles cujas cópias datam do século IX, nenhum outro postulado ou noção comum é acrescentado.

[64] Sobre a história da matemática, ver Florian Cajori, *A history of mathematics*, New York, [1893] 1919; van der Waerden, *Science Awakening*, New Jersey, 1954; Otto Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, New York, 1969; Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, 2 vols., Oxford, 1972. Sobre a matemática grega especificamente, ver James Gow, *History of greek mathematics*, Cambridge, 1884; George Johnston Allman, *Greek geometry from Thales to Euclid,* Dublin, 1877-1885; Thomas L. Heath, *A History of Greek mathematics*, 2 vols., Oxford, 1921; Ivor Thomas, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*, 2 vols., Cambridge (Loeb Classical Library), 1939-1941; Wilbur Knorr, *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Boston, 1986; Reviel Netz, *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History*, Cambridge, 1999a; idem, *A New History of Greek Mathematics,* Cambridge, 2022.

O mais próximo que se tem acerca da formação de Euclides está numa passagem chamada Catálogo dos Geômetras, um excerto atribuído a um discípulo de Aristóteles chamado Eudemo de Rodes e preservado pelo filósofo platônico Proclus, que viveu no século V d.C. Indo de Tales de Mileto até Euclides, o Catálogo lista os principais nomes da geometria grega e suas respectivas contribuições ao desenvolvimento daquela ciência. Nota-se, contudo, que Proclus usa essa passagem para destacar Platão como o artífice-mor das matemáticas. Euclides é mencionado ao fim, aparecendo como herdeiro da ciência matemática desenvolvida na Academia; a ele é atribuído o fato deste ter "aperfeiçoado a geometria dos predecessores", como Eudoxo e Teeteto, ambos matemáticos associados com Platão. Isso sugere que a composição dos *Elementos* poderia ter um propósito tão ou mais filosófico do que matemático. Isso fica claro na seguinte observação: "Euclides pertenceu ao grupo de Platão e era íntimo de sua filosofia; eis porque pensou na construção das chamadas figuras platônicas como o objetivo dos *Elementos* como um todo"[65].

Alguns dos pressupostos dessa linha interpretativa de Proclus merecem algumas reflexões críticas. Discute-se na seção 2.3 os princípios euclidianos segundo os comentários de Proclus e comparando-os com os *Analíticos Posteriores* de Aristóteles. Mostra-se, em primeiro lugar, que não havia consenso na Grécia Antiga a respeito da indemonstrabilidade dos princípios matemáticos, razão pela qual alguns autores, incluindo Proclus, não aceitavam a lista de Euclides. A interpretação de Proclus está baseada numa leitura equivocada de Aristóteles. Feito esse esclarecimento, discute-se na seção 2.4 o método inferencial usado por Euclides em suas demonstrações. Argumenta-se aí que uma interpretação do estilo euclidiano não pode reduzir todas as partes do argumento ao seu núcleo linguístico. A seção 2.5 considera o pertencimento de Euclides à tradição grega de resolução de problemas geométricos através de construções. Desde um ponto de vista epistemológico, a resolução de problemas é tão relevante quanto a contemplação da verdade de um teorema. E uma vez que a resolução de problemas geométricos envolve o recurso aos diagramas, a seção 2.6 problematiza a suposta ilegitimidade de sua aplicação em demonstrações matemáticas.

2.3. Princípios matemáticos

[65] Proclus, *In Euclidis*, 68.20-24: και τη προαιρέσει δέ Πλατωνικός έστι και τη φιλοσοφία ταύτη οικείος , όθεν δή και της συμπάσης στοιχειώσεως τέλος προεστήσατο την των καλουμένων Πλατωνικών σχημάτων σύστασιν. As figuras platônicas, também chamadas de sólidos regulares, são construídas no Livro XIII dos *Elementos*. São elas: a pirâmide (XIII.13), o octaedro (XIII.14), o cubo (XIII.15), o icosaedro (XIII.16), e o dodecaedro (XIII.17).

São três as razões para Proclus considerar os *Elementos* um tratado platônico. Em primeiro lugar, porque vários teoremas e técnicas de resolução de problemas matemáticos presentes naquela obra teriam sido descobertos por matemáticos da Academia ou do seu entorno. Em segundo lugar, porque o cerne argumentativo euclidiano seria a dialética. Em terceiro lugar, porque o objetivo final do tratado seria a construção dos chamados sólidos platônicos. Não obstante isso, é aos *Analíticos Posteriores* de Aristóteles que Proclus recorre para elucidar os primeiros princípios de Euclides[66]. Diz ele que os princípios da matemática são hipóteses, postulados e axiomas[67]. É uma lista diferente da de Euclides. Essa classificação não menciona as definições, que são princípios tanto em Aristóteles quanto em Euclides. A razão para isso é que Proclus, na maioria das vezes, identifica definições e hipóteses[68]. Além disso, o comentador também considera que os postulados são demonstráveis.

O fato de Proclus fazer de Euclides um platonista e seus *Elementos* um tratado de dialética platônica, além da exclusão de Aristóteles do Catálogo dos Geômetras, não obstante seu manifesto interesse pelas matemáticas, como se pode inferir a partir da abundância de referências feitas ao longo de sua obra a essa disciplina[69], mostra que o espólio intelectual de Euclides estava em disputa[70]. Por exemplo, Alexandre de Afrodísias, que viveu no início do século III, d.C. e foi um dos mais famosos comentadores de Aristóteles na Antiguidade, faz menção a Euclides em algumas passagens em que precisa explicar a ciência demonstrativa

---

[66] Ver Aristóteles, *Analíticos Posteriores*, 76a31-77a4.

[67] Ver Proclus, *In Euclidis*, 76.6, 178.1-8.

[68] Veja-se, por exemplo, os comentários às Definições I.10-12 (131), onde Proclus fala que os geômetras tomam a classificação dos ângulos como hipóteses, numa alusão à *República* 510c; *Comentário*, 178: “Hipóteses, ou as chamadas definições” (*hypothéseis kaì toùs kalouménous órous*); *Comentário*, enunciado I.26 (348-353); *Comentário*, 354. Conteúdo proposicional das hipóteses, ver *Comentário*, 77.2-6. Proclus também fala de hipótese como o antecedente de uma proposição condicional (comentário ao enunciado I.6, 252-256). Convém notar que não são interpretações excludentes. Pode-se pensar, por exemplo, que em I.1 Euclides deve considerar o segmento retilíneo *AB* enquanto definição de reta (Definições I.2 e I.4); enquanto modo de existência (hipotético) daquilo definido, garantido pelo Postulado 1; enquanto suposição para a demonstração de existência do triângulo equilátero. Nesse último sentido, pode-se reescrever a primeira frase da demonstração (“Seja dado o segmento AB”) assim: se existe uma reta *AB*, então existe, i.e., pode-se construir, um triângulo tal que seus lados são iguais entre si.

[69] Thomas L. Heath reuniu todas as passagens em que Aristóteles discute temas relativos às matemáticas em *Mathematics in Aristotle*, 1949.

[70] Thomas L. Heath, na tradução inglesa do texto euclidiano, procura explicar os princípios de Euclides, bem como suas demonstrações, dentro da tradição filosófica iniciada por Platão e Aristóteles. Essa alegada linha de continuidade, bem como a emergência da lógica contemporânea, serviu-lhe de justificativa para censurar Euclides nas ocasiões em que supostamente deixa “lacunas” em seus argumentos, destoando, pois, da doutrina aristotélica de ciência demonstrativa. Ver Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements*, Cambridge University Press, Vol. I, 1908, p. 117-124, 241-243). David Ross cita Heath ao apontar para a alta probabilidade de Euclides ter se inspirado em Aristóteles. Ver Ross, *Aristotle's Prior and Posterior Analytics: a revised text with Introduction and commentary*, Oxford University Press, 1957, p. 56. Oswaldo Porchat Pereira abraça essa interpretação integralmente em *Ciência e dialética em Aristóteles*, São Paulo, 2001, p. 60; vide p. 235, n. 109; p. 243, n. 175).

dos *Analíticos posteriores*. Mas, contra Proclus, há outras evidências que permitem uma aproximação entre Euclides e Aristóteles.

A historiografia reconhece 332 a.C. como o ano de fundação de Alexandria. Em poucas décadas essa cidade se tornaria o centro intelectual do mundo mediterrâneo. Nas matemáticas, tornaram-se célebres os nomes de Euclides, Arquimedes, Apolônio e Pappus. Após a morte de Alexandre, o Grande, a recém-fundada cidade de Alexandria passou para as mãos de Ptolomeu I Sóter. Esse mesmo Ptolomeu acolheu em seu novo reino um tal Demétrio de Faleros, preposto de Alexandre que governou Atenas durante dez anos. Diógenes Laércio inclui Demétrio no rol de peripatéticos, o qual teria escrito sobre os vários temas ensinados no Liceu[71]. Diz-se também que Demétrio de Faleros ficou responsável pela curadoria do Museu de Alexandria — imitando as estéticas da Academia e do Liceu — no qual estava localizada a famosa Biblioteca[72]. Essa é a primeira ligação entre o Liceu e Alexandria[73]. É ainda Diógenes Laércio quem esclarece que Strato, terceiro líder do Liceu depois da morte de Aristóteles, foi incumbido de ensinar Ptolomeu II, o Filadelfo. Esse foi o Ptolomeu que efetivamente construiu a Biblioteca. Essa é a segunda ligação. Esses testemunhos, aliados ao Catálogo, que apesar de tudo não pode ser descartado como fonte histórica, ajudam a circunscrever os *Elementos* num contexto intelectual muito influenciado por Platão e Aristóteles.

Não pretendemos, no momento, aprofundar o estudo sobre os *Analíticos posteriores*. Façamos apenas alguns esclarecimentos onde há divergências claras entre Proclus e o texto de Aristóteles.

A ciência começa a partir de coisas já sabidas, tal como ocorre na retórica e na dialética, segundo o próprio Aristóteles. Essas coisas sabidas são os primeiros princípios a

---

[71] Diógenes Laércio, *Vidas e doutrinas de filósofos ilustres*, V.75. Segundo Diógenes Laércio, foi graças à intervenção de Demétrio que Teofrasto, sucessor à frente do Liceu, tornou-se dono do terreno onde estava localizada essa escola (*Ibid*, V.39). Diodoro Sículo, porém, não fez menção ao perfil filosófico de Demétrio (vide *Biblioteca*, XX.45)

[72] A curadoria de Demétrio é destacada na Carta de Aristeias (ou Carta a Filócrates), que apesar do título, não tem autoria confirmada, mas foi escrita entre a segunda metade do século III e a primeira metade do II, a.C. Na carta, o autor diz que Demétrio era o responsável pela Biblioteca, vindo a receber vasta soma em dinheiro do rei (Ptolomeu I? Ptolomeu Filadelfo?) para comprar "todos os livros do mundo". Essa carta é famosa, no entanto, por dizer que foi por iniciativa de Demétrio que o Pentateuco, escrito em hebraíco, foi vertido ao grego, dando origem à Septuaginta. Jerusalém, vale lembrar, pertencia ao território recém-conquistado por Alexandre, passando, depois, aos ptolomeus. Mencionamos esses últimos fatos, tão distantes da geometria euclidiana, porque o historiador Flávio Josefo diz as mesmas coisas sobre Demétrio de Faleros (declarando, inclusive, que Demétrio agiu a mando de Ptolomeu Filadelfo), corroborando o relato de Diógenes Laércio, que corrobora os vínculos entre a doutrina aristotélica e a geometria euclidiana. Sobre o texto de Josefo, ver *Antiguidade dos judeus*, Livro XII, cap. 2; Sobre o *design* do Liceu, que provavelmente foi repetido em Alexandria, Diógenes Laércio, V.39, e Werner Jaeger, *Aristotle: Fundamentals of the history of his development* (1968, 1ª ed: 1934).

[73] Vide Gow, *A Short History of Greek Mathematics*, 1884, p. 195. O autor considera que Euclides e Demétrio de Faleros foram convidados por Ptolomeu Sóter para fundar o Museu de Alexandria.

partir dos quais os teoremas são demonstrados, não cabendo demonstrar os princípios pressupostos[74]. Toda entidade da teoria cuja existência não é assumida nas hipóteses, diz Aristóteles, deve ser demonstrado a partir dos primeiros princípios[75]. Esses princípios devem ser verdadeiros, primeiros, imediatos (i.e., indemonstráveis), mais conhecidos do que a conclusão, anteriores à conclusão, causais em relação à conclusão[76].

No Livro I Aristóteles fala que os princípios das ciências ou são *próprios* ou são *comuns*. Os princípios próprios são chamados por ele de *thesis*, subdivididos em definições e hipóteses. A principal diferença entre estes é que as hipóteses são declarações de conteúdo proposicional que pressupõem a existência do gênero de uma ciência e seus entes. As definições servem apenas para restringir o escopo significativo dos termos, condição importante para a fixação da terminologia técnica[77]. As definições não são portadoras de verdade e, por isso, não pressupõem a existência dos termos definidos. Tome-se como exemplo as definições I.1 e I.6 dos *Elementos*. Ambas tratam do ponto geométrico, ora como aquilo de que nada é parte, ora como o centro de um círculo; e no entanto, somente na proposição III.1 Euclides mostra como encontrar o centro de um círculo. Uma hipótese, por sua vez, é uma declaração que exprime uma proposição de conteúdo existencial acerca do gênero de uma ciência e seus entes, como seria o caso das magnitudes geométricas ou da unidade, na aritmética[78].

Os princípios comuns são chamados axiomas[79]. Aristóteles esclarece apenas que são princípios cuja verdade é pressuposta por todas as ciências. Os princípios próprios circunscrevem o escopo de uma ciência das demais, como, por exemplo, a geometria da

[74] Os axiomas, porém, são indemonstráveis por uma razão muito especial: como são comuns a todas as ciências, nenhuma disciplina científica poderia demonstrá-los. Compete à filosofia primeira discutir esses princípios não-hipotéticos (*Metafísica*, B.2, 997a5-9; Γ.3, 1005b11-20, Γ.4 1006a5-15, K.4, 1061b17-25).

[75] Aristóteles, *Analíticos posteriores*, I.10, *76a32-37.*

[76] Aristóteles, *Analíticos posteriores*, I.2, 71b22. Em *Tópicos*, I.1, 100b18, Aristóteles fala que os princípios deveriam ser autoevidentes, um critério a ser usado por Proclus. Noutra ocasião, Aristóteles diz que é recomendável que os princípios sejam poucos, o mínimo possível (*De caelo*, III.4, 302b26-30).

[77] Aristóteles, *Analíticos posteriores,* I.1, 71a14-15.

[78] Aristóteles, *Analíticos posteriores*, I.1, 76b33-36 e 72a23-24, I.10, 76b35-39. Vide também *Analíticos primeiros*, I.41, 49b-33-37, 50a1-4; *Metafísica* N, 1089a21-25.

[79] Ver Aristóteles, *Analíticos posteriores*, I.11, 77a. Aristóteles também usa opiniões comuns (τὰς κοινὰς δόξας) como sinônimo (*Metafísica*, III.2, 996b28). São exemplos de axiomas os princípios do terceiro excluído e o da não-contradição (*Analíticos posteriores,* I.1, 71a14; I.10, 77a10-12 e 30; I.32, 88b1). Há também os axiomas relativos à quantidade em geral, os quais são usados sobretudo na matemática (geometria e aritmética). Nesse particular, deve-se atentar para o fato de Aristóteles usar como exemplo proposições que correspondem às três primeiras Noções Comuns dos *Elementos* (*Analíticos posteriores,* I.10, 76a41-b20; I.11, 77a30-1. *Vide Metafísica*, XI.4, 1061b17-25). O estudo dos axiomas e, por conseguinte, dos axiomas matemáticos, pertence à filosofia primeira (Aristóteles, *Metafísica*, III.1, 995b6-10; III.2, 996b26-97al5; IV.3, 1005a-b; XI.4, 1061b17). Apesar desse termo não aparecer em Platão, veja-se *Parmênides*, 154B: coisas iguais adicionadas a coisas desiguais resultam em coisas desiguais. Essa proposição aparece na edição de Heiberg dos *Elementos* como a Noção Comum 4.

física, ao passo que os princípios comuns estão presentes em todas as disciplinas científicas, mesmo que tacitamente, como veremos.

Como se nota, a primeira divergência entre Proclus e Aristóteles, e também entre Euclides e Aristóteles, é a terminologia. Em segundo lugar, Aristóteles jamais identifica definições e hipóteses. Uma hipótese é uma proposição de conteúdo existencial, ao passo que uma definição estabelece uma relação de identidade entre uma expressão e um complexo de atributos. Em terceiro lugar, é uma condição *sine qua non* dos princípios aristotélicos a indemonstrabilidade. É verdade que tanto Aristóteles quanto Euclides falam em postulados, mas enquanto para o primeiro um postulado é apenas uma proposição que pode ser aceita sem justificativa, embora demonstrável, o segundo trata como postulado aquele princípio que não admitiria demonstração. A presença do mesmo vocábulo em Aristóteles e Euclides pode ser fruto de interpolação de copistas dos *Elementos*, o que é muito provável, ou uma simples e infeliz coincidência.

A divergência terminológica não é trivial. Fora desse quadro conceitual aristotélico não havia consenso sobre como chamar os primeiros princípios, tampouco havia critérios claros para classificar os tipos de princípios — quando havia — ou diferenciar princípios e as proposições que se seguiam destes. Pode-se conjecturar, por isso, que um dos objetivos de Aristóteles teria sido justamente organizar e sistematizar esses diversos conhecimentos sob uma terminologia apropriada. Seja como for, o texto de Proclus mostra que pouco havia mudado entre os séculos IV a.C. e V d.C.

Às vezes os princípios eram chamados axiomas, como era costume entre os estóicos[80]; noutras ocasiões, todos os princípios eram chamados postulados[81]. Essa ambiguidade é patente em Arquimedes. Em *Arenarius* ele chama de hipótese a proposição de Aristarco de Samos sobre o movimento de translação da Terra ao redor do Sol. (A propósito, Arquimedes rejeita a hipótese heliocêntrica.) Já em *De sphaera et cylindro*, os princípios são "axiomas ou suposições" (*axiōmata kai ta lambanomena*), embora as formulações adotadas sejam típicas das definições, a saber, notas características que limitam o escopo semântico de alguns termos[82]. Nem de longe têm a mesma generalidade dos axiomas de Aristóteles ou das noções comuns de Euclides[83]. A indeterminação conceitual era tamanha que Eutocius (480 -

[80] Proclus, *In Euclidis*, 77.2-6. Os estóicos chamavam de axiomas as proposições em geral. Ver Diógenes Laércio, *Vidas dos filósofos*, VII.65-66.
[81] Ver Proclus, *In Euclidis,* 181.15-182.22.
[82] Ver Heiberg, *Archimedis opera omnia, cum commentariis Eutocii*, Volume I.
[83] Por isso mesmo a letra de Arquimedes é ignorada por Heiberg, que traduz o termo por *Definitiones*; *lambomena* é traduzida como *postulata*. Ver Heiberg, *Archimedis opera omnia cum commenlariia Eutocii*. Leipzig, 1880-1. Essa escolha é seguida por Thomas L. Heath e Reviel Netz. Ver Heath, *The Works of*

540, d.C.), ao comentar essa passagem, ignora o texto arquimediano e chama os dois princípios de hipóteses[84]. Por fim, os princípios que Arquimedes apresenta em *De planorum aequilibriis* são chamados postulados ("eu postulo", αἰτούμεθα), tal como as duas proposições em *De Corporibus Fluitantibus* ("postulado": αἴτημα)[85].

Não se pode dizer que a nomenclatura usada nos *Elementos* seja de fato a que Euclides fixou originalmente. Ele poderia ter usado, à moda de Aristóteles, os termos "hipóteses" e "axiomas", ao invés de "postulados" e "noções comuns". A documentação pré-euclidiana sugere que pelo menos um tipo de princípio era contemplado em tratados científicos: as definições. Segundo Aristóteles, os pitagóricos costumavam usar definições, o que se coaduna com outras passagens de Platão[86] e do próprio Aristóteles, onde algumas versões das definições geométricas de Euclides são antecipadas. Soma-se a isso os tratados de Autólico de Pítame, matemático e astrônomo que viveu uma geração antes da de Euclides, nos quais apenas as definições são explicitadas. Os sucessores de Euclides em Alexandria, principal centro de estudos matemáticos do período helenista, continuaram o hábito de explicitar pelo menos uma lista de definições.

Ao contrário das definições e dos axiomas, para os quais há precedente na literatura filosófica, os postulados, até onde se sabe, são uma contribuição original de Euclides[87]. Os primeiros três postulados, chamados *postulados de construção* (ou construtivos), são formulados em frases imperativas. Os postulados de construção serão pressupostos por outros matemáticos, como Arquimedes e Apolônio (Daí uma possível explicação para a escassez desses princípios na Antiguidade.) O uso desse modo verbal costuma estar associado com regras, ordens, comandos, autorizações, etc., de maneira que não só descrevem algo, como também *prescrevem* algum tipo de ação: a de traçar linhas (retas, prolongações retilíneas e círculos)[88]. Proclus associa aos postulados o verbo προστάσσω, que

---

Archimedes, Cambridge, [1897] 2002; Netz, *The Works of Archimedes: The Two Books On the Sphere and the Cylinder*, Volume 1, Cambridge, 2004.

[84] Ver Heiberg, *Archimedis opera omnia*, vol. 3. Eutocius pertencia à escola alexandrina e também deixou comentários sobre as *Cônicas* de Apolônio. É muito provável que Eutocius conhecia a obra de Proclus, uma vez que dedica o comentário ao *De sphaera et cylindro* a Ammonius, que foi aluno de Proclus.

[85] Ver Heiberg, *Archimedis opera omnia, cum commentariis Eutocii*, Volume II. Arquimedes também trata os lemas como princípios de argumentos em *De lineis spiralibus* e *Quadratura parabolae*.

[86] Cf. definição de figura em *Menon* 75a-76a. Para os indícios da definição euclidiana de reta, ver *Parmênides* 137E. Também nesta obra há uma definição de círculo, na passagem ora citada, e uma outra de esfera, em 153D. Em *Metafísica* I.9, 992a20, Aristóteles menciona uma objeção lançada por Platão à definição de ponto. Ver outras definições em Aristóteles, *Tópicos*, Livro VI, 141b19, 142b24, 143b12, 148b19.

[87] Heath, por exemplo, pontua que embora existam semelhanças entre a ciência demonstrativa de Aristóteles e a geometria de Euclides, as definições e os postulados provavelmente foram elaborados pelo geômetra. Ver Heath, *The Thirteen Books of the Elements*, Cambridge, p. 117-124; A History of *Greek Mathematics*, Vol. 1. Oxford, 1921, p. 336-338.

[88] Tanto o Postulado 1 como o 2 permitem construir o que na Geometria contemporânea se entende por segmentos retilíneos. Esse é o entendimento de Thomas Heath e Bernard Vitrac. Em relação ao Postulado 3,

pode ser traduzido como *prescrever*, *comandar*, *ordenar*. Pode-se identificar aí uma linguagem normativa[89]. Os axiomas, ainda segundo Proclus, são discursivos[90]. A distinção entre princípios prescritivos e discursivos não aparece em Aristóteles. Essa distinção é uma das razões para Proclus afirmar que os Postulados 4-5 seriam teoremas, não princípios. Pois todo postulado é prescritivo, logo nenhum dos dois poderia ser um postulado; mas, também não poderiam ser axiomas, visto que se aplicam apenas a magnitudes geométricas. Eis porque Proclus diz que os princípios chamados por Arquimedes de postulados em *De Corporibus Fluitantibus* são, na verdade, axiomas: porque não são prescritivos[91].

Desde um ponto de vista lógico, pode-se argumentar que apesar da aparência gramatical dos postulados euclidianos, eles deveriam ser considerados proposições existenciais, tais como as hipóteses de Aristóteles. Consideremos os Postulados 1 e 2. O conteúdo proposicional de uma frase como "fique traçado um segmento *AB*" seria algo como "existe uma e somente uma reta entre os pontos *A* e *B*". Desde a publicação dos *Fundamentos da geometria* de David Hilbert, em 1899, os matemáticos têm dado preferência a formulações como essa última. Esta identificação não é trivial. Ainda que se possa falar que os postulados têm conteúdo proposicional de existência, na prática matemática engendrada pelos *Elementos* é preciso construir e, por conseguinte, exibir uma instância daqueles objetos pressupostos na teoria. Percebe-se melhor essa diferença nos Postulados 1 e 2. Esses princípios permitem construir o que na geometria contemporânea se entende por segmentos retilíneos. Mas são segmentos de retas infinitas[92]. Se a reta fosse infinita, o Postulado 2 seria dispensável.

A linguagem dos geômetras foi alvo de críticas desde os anos iniciais da Academia de Platão. Segundo Proclus, Espeusipo, sobrinho de Platão e herdeiro da Academia, defendia que toda proposição matemática deveria ser formulada como uma frase declarativa, enquanto Menaechmus, discípulo de Eudoxo de Cnido (407 - 357, a.C.)[93] e

---

Heath observa que os gregos não tinham uma palavra correspondente para "raios", o que os obrigava a dizer algo como "as linhas a partir do centro". Isso é notável nas Definições I.15 (εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν) e III.1. Essa é uma situação análoga às três seções cônicas (elipse, parábola e hipérbole), que embora fossem estudadas por Euclides, só foram receber nomes específicos com Apolônio. Convém notar, finalmente, que o intervalo, ou distância (διάστημα), mencionado no Postulado 3 é interminado. Portanto, ainda que se possa pensar que os postulados construtivos autorizam o uso da régua e do compasso, o diagrama desenhado, e, por conseguinte, a demonstração, não são determinados por esses instrumentos. Ver Heath, *The Thirteen Books of the Elements*, 1908, pp. 196-199; Vitrac, *Les Éléments*, Paris, 1990, p. 168-169; 185-194.

89 Entende-se que uma linguagem normativa não contém apenas comandos, tampouco que toda frase normativa seja sancionadora.

90 Proclus, *In Euclidis*, 181.5-8.

91 Proclus, *In Euclidis*, 181.18.

92 Ver Heath, *The Thirteen Books of the Elements*, 1908, pp. 196-199; Vitrac, *Les Éléments*, Paris, 1990, p. 168-169; 185-194.

93 Além de matemático, Diógenes Laércio (VIII.8) diz que Eudoxo foi médico, astrônomo e legislador. Diz ainda que aprendeu geometria com Arquitas de Tarento. Ainda segundo Laércio, Eudoxo tinha grande estima por

também contemporâneo de Platão, dizia que toda proposição matemática deveria ser equivalente a uma prescrição. O precedente dessa disputa está no Livro VII da *República*, onde Platão contrasta as "afirmações bem ridículas e forçadas" dos geômetras ao tipo de conhecimento almejado pelas matemáticas. Continua Platão: "É que é como praticantes e para efeitos práticos que fazem todas as suas afirmações, referindo-se nas suas proclamações a quadraturas, construções e adições e operações no gênero, ao passo que toda esta ciência é cultivada em vista do saber"[94].

Não é nosso objetivo explorar a filosofia da matemática de Platão. Em todo caso, consideramos haver três linhas interpretativas não excludentes na passagem acima. A primeira delas é ontológica: o objeto da geometria não está imerso no mundo contingente da geração e corrupção, de modo que nada nesta disciplina pode passar do não-ser ao ser por um ato criativo do geômetra. A segunda delas é epistemológica: como o objeto da geometria existe independentemente do que faz ou deixa de fazer o geômetra, dever-se-ia atentar para o fato de que são as ideias eternas e imutáveis que visa o conhecimento matemático, e não os *meios* pelos quais tornamo-nos conscientes delas. A terceira linha interpretativa é lógico-linguística: se os objetos matemáticos não são "trazidos à existência" mediante as construções operadas pelo geômetra e não são estas os objetos de conhecimento, então a linguagem normativa como a de Euclides, na melhor das hipóteses, dificulta o acesso à verdadeira realidade da geometria, ou, na pior delas, induz ao erro.

Nos *Elementos*, as noções comuns se diferenciam dos postulados construtivos pelo fato de serem frases declarativas que podem expressar proposições. E também são diferentes dos postulados como um todo pelo grau de generalidade: os postulados são princípios exclusivamente geométricos, ao passo que as noções comuns são aplicáveis à geometria e à aritmética[95]. Não existe consenso sobre o número exato de noções comuns dos

---

Platão. Viajou ao Egito e lá morou por pouco mais de um ano. Como matemático, teria descoberto a teoria das linhas curvas na 103ª Olimpíadas (368 - 365, a.C.). É contra a teoria hedonista de Eudoxo que se insurge Aristóteles em *Ética nicomaquéia*, 1101b27 e 1172b9. Sobre as contribuições de Eudoxo à astronomia antiga, consultar O. Neugebauer, *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, 1975, Parte II, Livro 4, p. 675-689. Pouco se sabe sobre Menaechmus além do que dizem Proclus e Eutocius.

[94] Platão, *República*, Livro VII, 527a. Adotamos a tradução de Maria Helena da Rocha Pereira (Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 9ª ed., 2001). Menções ao texto grego da *República* seguem a edição crítica de James Adam: *The Republic of Plato* ([1902] 2009, 2 vols.). Citações aos diálogos platônicos seguem John Burnet, *Platonis opera* (1903).

[95] A comparação com os axiomas de Aristóteles é inevitável. Em um dos sentidos de axioma, Aristóteles fala que são comuns a todas as ciências. Ele também esclarece que cada ciência deveria formulá-los, nos casos em que é preciso, de acordo com seus respectivos temas. Daí Euclides só os usar relativamente à quantidade. Convém notar que Euclides só apresenta postulados no Livro I. De um ponto de vista aristotélico, isso significa que os *Elementos*, tomado como um todo, é um tratado de geometria, excluindo-se de seu escopo a aritmética. Essa suposta negligência de Euclides vai ser "corrigida" na Idade Média com a inclusão de duas novas listas de princípios, uma de postulados e outra de axiomas, para os Livros VII-IX (que tratam da aritmética).

Elementos. Proclus menciona dez proposições, mas critica cinco delas[96]. O texto não permite concluir se Proclus as criticou porque não concordava com Euclides — e, neste caso, elas seriam genuinamente euclidianas — ou porque eram interpolações e, portanto, ilegítimas. Essas questões, típicas de um *scholar* contemporâneo, não estão presentes em comentários antigos. Tradicionalmente, as edições e traduções tanto dos *Elementos* quanto dos *Comentários*[97] optaram pela primeira via. A atual edição crítica do texto euclidiano, preparada por Heiberg, e que serve de base para as traduções do século XX, foi mais comedida, indicando apenas a indeterminação sobre a inclusão das noções comuns criticadas por Proclus[98].

Como já esclarecemos, Proclus diferencia postulados e noções comuns segundo o tipo de frase em que são formulados. Os postulados são prescritivos, i.e., assumem que algo pode ser facilmente feito, ao passo que as noções comuns são descritivas, i.e., assumem coisas evidentes e facilmente apreensíveis. Um outro critério, que o autor atribui a Aristóteles, é que os postulados seriam convincentes, mas demonstráveis, ao passo que os axiomas seriam verdadeiramente indemonstráveis[99]. Esse último critério implica em que todos os postulados são demonstráveis.

Nos *Analíticos posteriores*, as definições e hipóteses possibilitam a diferenciação específica entre teorias. Nada obsta, porém, que uma mesma proposição possa ser compartilhada por duas ciências diferentes, ora como uma hipótese, ora como um teorema, desde que seja estabelecida uma relação de subalternização entre elas. Por exemplo, a mesma proposição pode ser uma hipótese na mecânica e ser um teorema na geometria. Os únicos princípios que são indemonstráveis independentemente da teoria são os axiomas, uma vez que não pressupõem a existência de uma classe específica de coisas. Por outro lado, Aristóteles também fala de proposições que prescindem de demonstração prévia, mas são demonstráveis relativamente à teoria.

[96] O texto de Proclus é muito claro acerca do número de postulados: cinco. Das noções comuns, pelo menos cinco são legítimas. Sobre as interpolações, Proclus menciona o caso de Heron de Alexandria, o qual teria sugerido reduzir a lista a apenas três proposições — não se sabe quais, mas provavelmente eram as três primeiras — , o que é rejeitado por Proclus, que também rechaça acréscimos posteriores.

[97] Vide Barozzi (Pádua, 1560) e Friedlein (1873). O texto de Morrow segue a lista de Heiberg (cf. supra).

[98] Há um consenso entre os estudiosos da obra euclidiana acerca da legitimidade das primeiras três noções comuns. Em primeiro lugar, essas noções comuns aparecem em todos os manuscritos disponíveis dos *Elementos*. Em segundo lugar, é sabido que as três foram formuladas em algum momento antes de Euclides, uma vez que são mencionadas por Aristóteles como exemplos de axiomas (por exemplo, *Analíticos posteriores*, I.10, 76a37-b2, 76b16-21).

[99] Proclus, *In Euclidis*, 188.5-6. Eis porque Proclus critica Apolônio por tentar provar a Noção Comum 1. Ver Proclus, 196.1-3.

Proclus parece sugerir um terceiro tipo de enunciado. São indemonstráveis para ele apenas as definições e as noções comuns (ou axiomas). Os postulados, que ele considera um subgrupo das hipóteses (em sentido aristotélico), podem ser incluídos entre os princípios, mas são demonstráveis mediante as definições e noções comuns.

A interpretação procliana está equivocada. Na passagem em questão, Aristóteles fala de proposições que podem ser supostas ou postuladas *relativamente ao estudante*, não à teoria. Por exemplo, caso alguém queira ensinar geometria euclidiana e, por alguma razão, comece pelo Teorema de Pitágoras[100], vai precisar pedir ao estudante que aceite sem demonstração vários resultados já demonstrados; do contrário, será preciso demonstrar cada construção e, assim, regredir à Proposição I.1, fazendo a prova desnecessariamente longa. A proposição que o estudante aceita sem demonstração, mas que pode ser demonstrada, ou vai estar em conformidade com as suas crenças ou não. Se está em conformidade com as crenças, então é uma hipótese; do contrário, é um postulado. Eis a passagem (os grifos são nossos):

> Qualquer proposição demonstrável que o professor supõe sem provar, se o estudante a aceita, é uma hipótese — *não uma hipótese em sentido absoluto, mas relativa ao estudante*; se, porém, a mesma suposição é feita quando o estudante não tem opinião formada a respeito ou, de fato, quando tem opinião contrária, então é um postulado. Essa é a diferença entre uma hipótese e um postulado: este é uma suposição contrária à opinião do estudante, embora seja demonstrável[101].

Todo argumento deve partir de proposições já conhecidas (logo, verdadeiras) ou cuja verdade é suposta dentro de uma teoria. Essa é a diferença entre axiomas e hipóteses, respectivamente. Aristóteles havia chamado de hipóteses as proposições de existência cuja verdade, que é suposta, não precisa ser demonstrada e *não admite demonstração* dentro de uma teoria. Uma mesma proposição pode ser uma hipótese indemonstrável dentro de uma teoria, mas um teorema em outra teoria superior. Essa teoria superior teria outras definições, hipóteses e axiomas. Esse é o caso de Arquimedes e Apolônio quando assumem sem demonstração prévia os teoremas de Euclides[102]. Por outro lado, Aristóteles diz na passagem acima que algumas suposições podem ser admitidas dentro de uma teoria sem a necessidade de demonstração prévia, mas demonstráveis mediante os princípios já estabelecidos nessa mesma teoria. Nesse

[100] Euclides, *Elementos*, I.43. Não há registro de demonstração mais antiga parecida com a de Euclides.

[101] Aristóteles, *Analíticos posteriores*, I.10, 76b27-34. Veja-se Aristóteles, *Analíticos posteriores*, I.2.72a16: As *theses*, i.e., os princípios próprios, são requisitos necessários para quem deseja aprender algo.

[102] No Livro I de *Da esfera e do cilindro* Arquimedes usa sistematicamente os resultados do Livro XII dos *Elementos*. Arquimedes, ademais, apenas assume as construções geométricas, as quais poderiam ser justificadas pelo método euclidiano de resolução de problemas. Eutocius comenta que Arquimedes escolheu apenas os princípios que poderiam ser demonstrados a partir das noções comuns e teoremas de Euclides. Isso não se aplica a todos os princípios de Arquimedes. Por exemplo, o Postulado 5 é equivalente à definição 4 do Livro V dos *Elementos*.

sentido, as hipóteses relativas e os postulados, apesar da terminologia, devem ser considerados teoremas[103]. Dito de outra maneira, e com um jargão mais próximo da literatura contemporânea, Aristóteles não nega a independência dos primeiros princípios — embora reafirme a possibilidade da subordinação —, tese bem diferente daquela defendida por Proclus, para o qual alguns princípios podem ser deduzidos a partir de outros dentro de uma mesma teoria.

Pode-se conjecturar dois motivos para Proclus ter considerado que os postulados de Euclides são demonstráveis. O primeiro deles eram as objeções dos céticos às matemáticas. Proclus não comenta o teor dessas objeções, mas deixa claro que os representantes dessas escolas rejeitavam, parcial ou totalmente, a ideia de uma ciência erguida a partir de princípios. Os céticos aos quais Proclus se refere eram os pirronistas e seu representante muito provavelmente era Sexto Empírico. O Livro III de *Contra os matemáticos* começa com objeções às hipóteses geométricas. Dentre as várias objeções contra os princípios e demonstrações, encontra-se o seguinte argumento. Aceitar hipóteses sem demonstrações prévias das mesmas implica a possibilidade de formular hipóteses absurdas, de onde as conclusões extraídas seriam igualmente absurdas. Ou seja, o único meio de garantir que somente verdades fossem deduzidas seria demonstrar a verdade dos princípios a partir dos quais essas verdade são deduzidas.

A segunda motivação de Proclus é decorrência do seu platonismo. Na Analogia da Linha Dividida (*República*, Livro VI, 509d - 511e), Platão compara, a partir do traçado de uma linha, a maneira como se relacionam os segmentos correspondentes ao que é visível (*horata*), *i.e.*, àquilo que se mostra, que é manifesto, e se deixa apreender pela sensibilidade e diz respeito à experiência, e aquilo que é inteligível (*nonta*), que, como o nome sugere, apreende-se mediante o uso dalguma faculdade da alma, a saber, o intelecto. Os segmentos da linha são divididos nas mesmas proporções que a linha original fora dividida. No segmento correspondente ao visível, a seção mais ao extremo é a das imagens (*eikones*): as sombras, os reflexos n'água e as que se formam em todos os corpos lisos e brilhantes; na outra seção, encontram-se os corpos físicos em geral e toda espécie de artefatos (*kai to skeuaston holon genos*). Em relação ao inteligível, que também se divide em duas seções, Platão afirma, através de Sócrates, o seguinte:

> Na parte anterior, a alma, servindo-se, como se fossem imagens, dos objetos que eram então imitados, é forçada a investigar a partir de hipóteses, sem

[103] Essa interpretação é compatível com a de Heath, *Mathematics in Aristotle*, Oxford, 1949, p. 54-57 Ross, *Aristotle's Prior and Posterior Analytics*. Oxford, 1949, p. 539-541; Jonathan Barnes, *Aristotle. Posterior Analytics.* 2ª ed. Oxford University Press, p. 140-141.

> poder caminhar para o princípio, mas para a conclusão; ao passo que, na outra parte, a que conduz ao princípio não-hipotético, parte da hipótese e, dispensando as imagens que havia no outro, faz caminho só com o auxílio das ideias[104].

A parte anterior à qual Sócrates se refere é onde encontram-se os ensinamentos (*mathēsē*) relativos à arte do cálculo ou aritmética (*logismous*), geometria plana, estereometria, *i.e.*, geometria sólida — as matemáticas, embora Platão não as classifique assim —, astronomia e harmônica[105]. Todos estes ensinamentos procederiam a partir de hipóteses (*ex hypotheseōn*). Platão esclarece ainda que tanto na geometria quanto naquela arte de calcular são supostos (*hypothemenoi*), de um lado, as figuras, três espécies de ângulos e muitas coisas parecidas, enquanto que, do outro, fala-se no ímpar e no par. E Sócrates acrescenta:

> Estas coisas dão-nas por conhecidas, e quando as fazem de hipóteses, não acham que ainda seja necessário prestar contas disto a si mesmos ou aos outros, uma vez que são evidentes para todos. E, partindo daí e analisando todas as fases e tirando as consequências, atingem o ponto cuja investigação se tinham abalançado[106].

Tanto as matemáticas quanto a dialética usam hipóteses, mas só esta a utiliza segundo sua etimologia, a saber, como declaração provisória. Os matemáticos assumem as hipóteses como princípios, início de seus argumentos, os quais só podem ir em direção à conclusão através de inferências dedutivas. Isso é compatível com o que vimos até agora dos *Analíticos posteriores* e dos *Elementos*. É da competência da dialética, segundo Proclus, fornecer e discutir os princípios científicos, o que está de acordo com o que diziam Platão e Aristóteles. A despeito disso, o texto de Proclus não reconhece a indemonstrabilidade como um requisito lógico dos princípios euclidianos, razão pela qual ele diz que pelo menos um desses princípios, as hipóteses, poderia ser demonstrado a partir das demais.

Após essa apresentação, analisaremos agora as demonstrações euclidianas. Para além do uso dos diagramas, veremos também que esses argumentos parecem sugerir algum tipo de padronização, fato que não escapou a Proclus.

---

[104] ᾗ τὸ μὲν αὐτοῦ τοῖς τότε μιμηθεῖσιν ὡς εἰκόσιν χρωμένη ψυχὴ ζητεῖν ἀναγκάζεται ἐξ ὑποθέσεων, οὐκ ἐπ᾽ ἀρχὴν πορευομένη ἀλλ᾽ ἐπὶ τελευτήν, τὸ δ᾽ αὖ ἕτερον—τὸ ἐπ᾽ ἀρχὴν ἀνυπόθετον—ἐξ ὑποθέσεως ἰοῦσα καὶ ἄνευ τῶν περὶ ἐκεῖνο εἰκόνων, αὐτοῖς εἴδεσι δι᾽ αὐτῶν τὴν μέθοδον ποιουμένη.

[105] Platão, *República*, VII, 522c-531c.

[106] Platão, *República*, 510c-d2: ταῦτα μὲν ὡς εἰδότες, ποιησάμενοι ὑποθέσεις αὐτά, οὐδένα λόγον οὔτε αὑτοῖς οὔτε ἄλλοις ἔτι ἀξιοῦσι περὶ αὐτῶν διδόναι ὡς παντὶ φανερῶν, ἐκ τούτων δ᾽ ἀρχόμενοι τὰ λοιπὰ ἤδη διεξιόντες τελευτῶσιν ὁμολογουμένως ἐπὶ τοῦτο οὗ ἂν ἐπὶ σκέψιν ὁρμήσωσι.

2.4. As demonstrações euclidianas

Não se sabe a origem dos princípios euclidianos, nem o número exato nem a nomenclatura usada. Essa limitação documental faz com que especialistas na obra euclidiana projetem sobre os *Elementos* os conceitos dos *Analíticos posteriores*, uma vez que a ciência demonstrativa ali apresentada assume também uma lista tríplice de primeiros princípios indemonstráveis (definições, hipóteses e axiomas). Essa interpretação, como se viu, é respaldada pelo comentário de Proclus. Tanto os intérpretes de Aristóteles quanto os de Euclides reforçam tal aproximação, apesar das diferenças já mencionadas. Viu-se, porém, que Aristóteles e Euclides divergem quanto aos princípios próprios, mais precisamente, as hipóteses e postulados. Uma divergência ainda maior é aquela entre os métodos inferenciais de suas respectivas demonstrações. As demonstrações de Euclides são *heterogêneas*, i.e., contemplam dois modos de justificação, o texto e o diagrama; Aristóteles, ao contrário, apresenta uma concepção de demonstração que pode ser considerada *homogênea* por ser definida como um tipo de silogismo, cuja exteriorização se dá por meio de alguma linguagem[107].

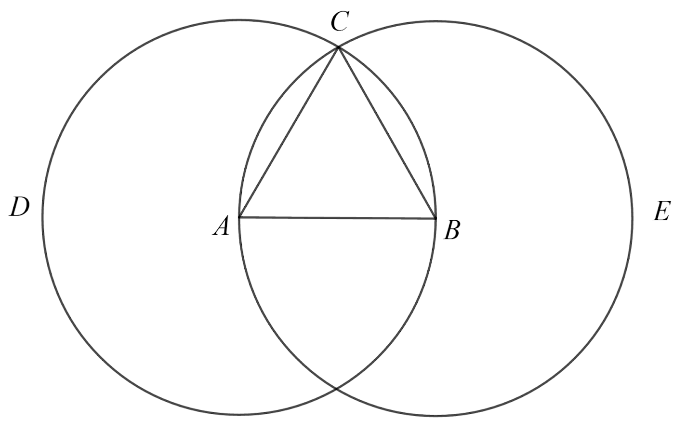

Figura 2: diagrama correspondente à Proposição I.1

O primeiro enunciado dos *Elementos* é um problema: construir, numa reta dada, um triângulo equilátero. Euclides resolve o problema assim. Com o ponto *A* e distância *AB*, é

[107] Deve-se a divisão das demonstrações em *homogêneas* e *heterogêneas* a Jon Barwise e John Etchemendy. O critério de diferenciação é o uso de representações gráficas, admitidas *como meio de justificação* somente nas demonstrações heterogêneas. Ver Barwise & Etchemendy, “Visual Information and Valid Reasoning”. In: AllWein, G & Barwise, J. *Logical Reasoning with Diagrams*. Nova York: Oxford University Press, 1996. p. 3–23.

traçado o círculo *BCD*; e, com o ponto *B* e distância *BA*, é traçado o círculo *ACE*. Ambas as construções são justificadas pelo Postulado 3. Pelo Postulado 1, são traçadas as retas *AC* e *BA*. Logo, *AC* e *AB* são iguais, pois são raios do mesmo círculo; pela mesma razão, são iguais as retas *BA* e *BC*. E como coisas iguais à mesma coisa são iguais entre si (Noção Comum 1), as retas *AC* e *BC* são iguais. Portanto, o triângulo *ABC* é equilátero, como era requerido.

Os enunciados que se seguem dos primeiros princípios ou são a *resolução de problemas* (*problēmatōn apergasian*) ou a *descoberta de teoremas* (*theōrēmatōn heuresin*). São problemas os enunciados cujo objetivo é *produzir*, *dividir*, *subtrair* ou *adicionar* seções de figuras, *trazer* às vistas, ou, de um modo geral, *construir* "o que não existe"; exige-se também que uma figura *seja posta* num lugar, *aplicada a* outra, *inscrita na* ou *circunscrita por* outra, *seja ajustada* ou *seja posta* em contato com outra figura. Os enunciados-problemas são frases imperativas que expressam tarefas matemáticas postas para a resolução a partir dos princípios e outros enunciados. São teoremas os enunciados cujo propósito é *ver, identificar* e, de modo geral, *demonstrar* a predicação de um atributo a um ente matemático[108]. Os enunciados-teoremas são frases declarativas que expressam proposições que, se verdadeiras, são demonstradas a partir dos princípios e outros enunciados. É a contemplação (*theōria*) da verdade matemática sobre os objetos previamente definidos.

Em seu estudo, Proclus separou as demonstrações euclidianas em seis partes: enunciado (*protasis*), exposição (*ekthesis*), especificação (*diorismos*), construção (*kataskeuē*), demonstração (*apodeixis*) e conclusão (*symperasma*). Segundo essa organização, a resolução da primeira proposição seria a seguinte:

Enunciado	Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada
Exposição	Seja *AB* a reta limitada dada.
Especificação	É preciso, então, sobre a reta *AB*, construir um triângulo equilátero
Construção	Fique descrito, por um lado, com o centro *A* e, por outro lado, com distância *AB*, o círculo *BCD* [Postulado 3]. Fique descrito, de novo, por um lado, com o centro *B* e, por outro, com distância *BA*, o círculo *ACE* [Postulado 3]. Sejam traçadas, a partir de *C*, as retas *CA* e *CB* [Postulado 1]
Demonstração	Logo, como *A* é o centro de *CDB*, as retas *AC* e *AB* são iguais [Definição I.15] Logo, como *B* é o centro de *CAE*, as retas *BC* e *BA* são iguais [Definição I.15]

[108] Proclus, *In Euclidis,* 77.7; 201.3.

Logo, são iguais as retas *AC* e *BC* [Noção comum 1]
Logo, *ABC* é um triângulo e é equilátero e foi construído sobre a reta limitada *AB*.

Conclusão Portanto, sobre a reta limitada foi construído um triângulo equilátero; o que era preciso fazer.

Com poucos desvios, o método inferencial euclidiano nos Livros I-VI se encaixa nessa organização[109]. Eis porque ela é usada para explicar as demonstrações euclidianas. É certo que a prosa euclidiana tem um estilo próprio, o qual é verificado pelo uso sistemático de certos padrões de escrita. As coisas são lembradas com mais facilidade, diz Aristóteles, quando são organizadas ordenadamente, *tal como na matemática*[110]. Esses padrões de escrita são verificáveis também em vários outros cientistas antigos, como Autólico de Pitame, Arquimedes, Apolônio e Ptolomeu, o que sugere ter havido *algum* tipo de padronização no modo de apresentação do discurso científico grego.

Nos últimos anos, alguns estudos linguísticos estão preenchendo uma lacuna importante a esse respeito[111]. Ainda assim, a literatura especializada não parece ter se ocupado de assuntos relacionados ao modo de apresentação das demonstrações. Questões como estilo e organização do discurso aparentam estar mais próximas da retórica do que da ciência demonstrativa. De fato, Aristóteles só discute estilo e organização no Livro III da *Retórica*. Por si só, o texto de Proclus não permite conjecturas nessa direção — por enquanto. Há indícios de que a terminologia usada por Proclus possa ter sido tomada por empréstimo dos *Tópicos* e dos *Analíticos* para abarcar uma escolha deliberada do autor dos *Elementos*. De nossa parte, discutiremos se as perspectivas lógica e dialética são suficientes para dar conta das demonstrações heterogêneas de Euclides.

Segundo Proclus, as partes indispensáveis das demonstrações euclidianas são o enunciado, a dedução e a conclusão. Isso explica a maneira ambígua com que ele fala em *apodeixis*, ora designando todo o discurso (do enunciado até a conclusão), ora designando apenas uma de suas partes. De fato, há demonstrações em que Euclides não explicita a

---

109 Como diremos logo a seguir, há demonstrações em que alguma dessas partes é omitida. Há também casos, como I.44, em que o texto separa com muita clareza a parte construtiva da parte demonstrativa. Vide Netz, Proclus' Division of the Mathematical Proposition into Parts: How and Why Was it Formulated?, The Classical Quarterly, New Series, Vol. 49, No. 1, 1999, p. 302.

110 Aristóteles, *De Memoria* 452a1-5. O autor não esclarece qual ordem (τάξις, *táxis*) seria verificada na prosa matemática.

111 Que se tem notícia, o primeiro estudo sobre os padrões de escrita na ciência antiga é o de Germaine Aujac, Le langage formulaire dans la géométrie grecque. *Revue d'histoire des sciences*, 1984, p. 97-109. Veja-se também Netz, *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: a study in cognitive history*. Cambridge University Press, 1999, cap. 4; Fabio Acerbi, *The Logical Syntax of Greek Mathematics*. Springer, 2021.

exposição, a especificação, a construção ou até mesmo a conclusão[112]. Intérpretes contemporâneos de Euclides, como Ian Mueller[113], consideram como demonstração somente a *apodeixis*, ignorando todas as outras partes.

Entre os séculos IV e III a.C. percebe-se um uso técnico de *protasis* nos escritos matemáticos, passando a significar enunciado demonstrável, em oposição, portanto, a *hipotesis*. No caso de Euclides, que não foge muito da prática grega, a *protasis* é um enunciado que não faz nenhuma referência a objetos através de letras. Esses enunciados, como visto, estão no modo indicativo (teoremas) ou no imperativo (problemas). Em Aristóteles, porém, a *protasis* é uma declaração (*lógos*) que afirma ou nega alguma coisa de alguma coisa e, ou é universal ou particular ou indeterminado"[114].

Nos *Elementos*, a exposição é uma paráfrase da primeira parte do enunciado com o acréscimo das letras para os pontos. Por exemplo: "Seja dada a linha reta AB"[115]. O ser dado (*dedomena*) na geometria euclidiana tem um sentido técnico. Nos *Dados*, obra que complementa o conteúdo geométrico dos *Elementos*, Euclides esclarece já nas primeiras definições o seguinte[116]:

1. os pontos são dados *só em posição*;
2. as linhas e os ângulos são dados tanto em posição quanto em magnitude;
3. as figuras retilíneas são dadas em posição, em magnitude e em figura ou espécie.

É possível traçar um paralelo com os *Elementos*: porque os pontos têm posição e são as extremidades da linha, esta também tem posição, o mesmo valendo para os ângulos; porque as linhas têm magnitude e estas encerram um ângulo ou são a fronteira de uma figura, também estes têm magnitude. Vale a pena notar que é na exibição que o texto e o diagrama começam a cooperar, uma vez que o objeto dado é introduzido textualmente e o diagrama, que o representa, passa a ser considerado pela audiência neste momento.

Ekthesis é o termo técnico usado por Aristóteles nos *Analíticos primeiros* quando se refere a uma instância de uma das figuras silogísticas. A exibição pode ser o simples rearranjo de frases em linguagem natural, destacando-as de seu contexto discursivo prévio —

---

[112] Euclides não costuma enunciar a conclusão nos Livros VII-IX.
[113] Ver Mueller, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*. Massachusetts, 1981, p. 11-15.
[114] Aristóteles, *Primeiros analíticos*, 24a-16-17. Ver Autólico de Pitane (*De ortibus et occasibus*, 2.6), Aristarco de Samos (*Sobre os tamanhos e distâncias entre o sol e a lua,* proposição 11), Arquimedes (*Método* e *Da esfera e do cilindro,* Introdução), Apolônio (*Cônicas*, III.1) e Pappus (*Coleção* III.1). Euclides (*Elementos*, XI.35 e XI.37).
[115] Heiberg, *Euclides opera omnia*, I.1: ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB.
[116] Os *Dados* contém 15 definições, sendo que a autenticidade das três últimas é questionada por Heiberg.

mais ou menos como se faz hoje em dia, com duas premissas acima da conclusão, esta separada daquelas por uma barra horizontal —, ou a substituição dos termos da linguagem natural por letras, e, por conseguinte, a sua distribuição visual (uma exibição, portanto), tal como os geômetras fazem com seus diagramas[117]. Proclus usa *ekthesis* nessa segunda acepção. Deve-se notar, porém, que Aristóteles é veemente ao dizer que diagramas e outros recursos gráficos, incluindo a exibição das figuras silogísticas, não têm função demonstrativa. Diz ele:

> Não se deve supor que algum absurdo resulte do estabelecimento de termos. Não baseamos nosso argumento na realidade de um exemplo particular; estamos fazendo o mesmo que o geômetra que diz que tal e tal linha de um pé ou linha reta ou linha sem largura existe quando não existe, mas não usa suas ilustrações no sentido que ele argumenta a partir delas[118].

Com relação à delimitação, responsável por determinar ou examinar se uma investigação possui solução ou não, Proclus afirma, mais uma vez citando Eudemo de Rodes como fonte, que o descobridor da delimitação foi um tal Leon[119], do qual nada se sabe. É, contudo, Filodemo quem declara que foi durante a direção de Platão à frente da Academia que foram feitos avanços importantes relativamente à análise, aos lemas e à delimitação. Ou seja, a delimitação teria sido descoberta dentro da Academia, ou por Platão ou por algum de seus alunos. Analogamente à exposição, a delimitação (ou especificação) é também uma paráfrase do enunciado, mas de sua parte final. Quando o enunciado é um teorema, o tempo verbal é o indicativo e a frase como um todo é declarativa. Atine-se para a maneira como Euclides inicia I.6:

> ***ekthesis:*** Seja o triângulo isósceles *ABC*, tendo o lado *AB* igual ao lado *AC*, e fiquem prolongadas ainda mais as linhas retas *BD, CE* sobre uma reta com *AB*, *AC*.
> ***diorismos:*** *Digo que*, por um lado, o ângulo sob *ABC* é igual ao sob *ACB* e, por outro lado, o sob *CBD* igual ao sob *BCE*[120].

Quando, porém, o enunciado é um problema, o modo verbal é o infinitivo e o tempo verbal da frase, o imperativo. Veja-se como se inicia I.1:

---

[117] Aristóteles, *Analíticos primeiros*, I.6, 28b14 e I.41, 49b32. Ver também *Metafísica*, Livros I, 992b10 e XIV, 1090a17. Alexandre de Afrodísias diz que a *ekthesis* é comparável aos diagramas geométricos. Veja-se Alexandre de Afrodísias, *In Aristotelis Analytica Posteriora*, 49b32, 379.12-380.27. Adotamos a tradução de Ian Mueller, *On Aristotle Prior Analytics 1.23-31*, New York. Ver também Filopono, *In Aristotelis analytica posteriora commentari*, Berolini, 1909, 10.28ff e 467.10 (*ekthesis* de um theorema). Para outros usos de *ekthesis* nas obras aristotélicas, ver Ross, *Aristotle's Metaphysics*, Oxford University Press, 1924, Vol. I, p. 208-209 e Vol II, p. 480-481.
[118] Aristóteles, *Analíticos primeiros*, I.41, 49b33-38. A mesma advertência em *Analíticos posteriores*, 76b39 e *Metafísica*, 1078a20. Seguimos a tradução de Hugh Tredennick.
[119] Proclus, *In Euclidis,* 66.19-24.
[120] Esse estilo frasal também está presente em Autólico e Arquimedes.

***ekthesis*:** Seja a reta limitada dada *AB*.
diorismos: *Construir* sobre a reta *AB* um triângulo equilátero.

De um ponto de vista lógico, pode-se argumentar que exposição e a delimitação funcionam como os dois elementos de uma proposição condicional. Ou seja, dados determinados objetos que satisfazem tais predicados, então outros objetos podem ser construídos, de modo que satisfazem tais outros predicados. Essa reconstrução dependeria de uma depuração anterior da gramática euclidiana, de modo a mostrar sua forma "lógica subjacente". Como veremos no Capítulo 3, essa é a proposta de Jeremy Avigad, Edward Dean & John Mumma no artigo "A formal system for Euclid's *Elements*", de 2009[121].

A construção é a etapa onde os novos objetos são introduzidos. Utiliza-se por aqui os postulados 1-3 e algum enunciado-problema previamente resolvido[122]. E mais uma vez, o tempo verbal é o imperativo. É neste momento onde o diagrama inicial é modificado, ou, caso tenha sido apresentado completo, quando se deve chamar a atenção da audiência para a maneira como outros componentes foram incorporados ali[123]. É também na parte construtiva onde aparecem as primeiras inferências diagramáticas.

Nas demonstrações euclidianas, a parte designada por Proclus de *apodeixis* confirma que o objeto dado, ou que foi construído, possui os atributos mencionados na especificação. Essa parte vale tanto para os problemas quanto para os teoremas. Aqui, Euclides justifica as afirmações por meio dos Postulados 4 e 5, pelas noções comuns ou por algum enunciado previamente demonstrado. De todos os vocábulos usados por Proclus, *apodeixis* é o mais comum no jargão aristotélico[124]. *Apodeixis* é sempre um tipo de silogismo, quer seja o demonstrativo, quer seja o retórico (entimemas). Proclus concede que as demonstrações euclidianas são silogísticas, a despeito do fato de Euclides não apresentá-las assim e proceder por inferências diagramáticas.

Como o próprio nome diz, a conclusão é o fim do raciocínio. O enunciado é repetido, mas com a manutenção das letras. Quando se trata da demonstração de um teorema, Euclides fala "o que era preciso *mostrar*" (*hoper edei deixai*); quando se trata da resolução de um problema, diz "o que era preciso *fazer*" (*hoper edei poiēsai*). Ian Mueller e Reviel Netz

[121] Ver Avigad, Dean & Mumma, A formal system for Euclid's *Elements*. *The Review of Symbolic Logic* 2.4, 2009, p 700-768.
[122] Ver Sidoli, N., Uses of construction in problems and theorems in Euclid's *Elements* I–VI. *Archive for History of Exact Sciences*, 72, 2018.
[123] Vitrac observou que embora o termo *kateskeué* seja o mais comum ao se falar em construção (como em Proclus), Euclides usa também σύστασις ou συστήσασθαι. Ver Vitrac, *Les Elements*, Paris, 1990, p. 138, n. 341.
[124] Não há registros na literatura pré-aristotélica do termo *apodeixis* sendo usado nessa acepção técnica. O termo usado por Platão para designar demonstrações é *tekmerion,* termo esse presente, e numa acepção bem parecida, em Homero, Tucídides e nos sofistas.

estão corretos quando dizem que a inclusão da conclusão é logicamente redundante[125]. Mas essa redundância existe apenas se o texto é considerado sob um olhar lógico-linguístico. De um ponto de vista retórico, a recapitulação ao final é uma maneira de reforçar para a audiência que a construção feita satisfaz as condições estabelecidas pelo problema. Em uma comunicação oral, ou semi-oral, isso faz muita diferença.

O historiador Reviel Netz questionou a organização de Proclus ao notar que a terminologia não era respaldada por outras fontes no tocante ao estudo das matemáticas. Ele questiona também a uniformidade pressuposta da organização, posto que outros matemáticos gregos não argumentam como Euclides[126]. Agora, não há razão suficiente para se pensar que as demonstrações matemáticas fossem descritas adotando-se a terminologia presente no *Comentário*, o que não é o mesmo que negar a existência de uma ordem no modo de apresentação. Que Proclus tenha usado termos técnicos também presentes em textos de Aristóteles apenas ressalta certo propósito filosófico de abarcar uma prática argumentativa mais ou menos sistemática. Quanto à segunda objeção, deve-se notar que as dessemelhanças que poderiam haver entre Euclides e seus contemporâneos e seus sucessores, como Arquimedes, são comparáveis àquelas que há entre a definição *standard* de demonstrações e os argumentos que alguém pode apresentar num paper, onde o afã de proceder por demonstrações supostamente rigorosas pode ser deixado de lado em favor de raciocínios mais breves.

Comparado aos demais matemáticos cujos textos chegaram aos dias de hoje, Euclides é quem mais se aproxima da organização de Proclus. Os padrões de escrita em Arquimedes, Apolônio e Pappus sugerem alguma padronização no estilo das demonstrações, pelo menos no âmbito da Escola de Alexandria, embora se veja nesses matemáticos um desinteresse em se encaixar completamente nalgum tipo de organização prévia[127]. Nesses autores, sim, o mais comum é a inclusão apenas do enunciado e a dedução. A omissão da *ekthesis* e da *kataskeue* poderia ser justificada por referência aos *Elementos*. Isso parece reforçar um contraste entre as exigências epistemológicas e lógicas dos filósofos, de um lado, e a prática matemática, do outro. Tais exigências, como a explicitação de todos os passos numa demonstração, pareceriam burocráticas a um Arquimedes, por exemplo, onde poucas

---

[125] Netz, *Op. cit.,* p. 290.

[126] *Ibid.,* p. 286-294.

[127] Knorr contrasta a pesquisa do geômetra, uma atividade construtiva, à descrição "formal" das demonstrações feitas por filósofos. Ver W. Knorr, On the early history of axiomatics: The interaction of mathematics and philosophy in Greek antiquity. In: *Theory Change, Ancient Axiomatics, and Galileo's Methodology: Proceedings of the 1978 Pisa Conference on the History and Philosophy of Science Volume I.* Dordrecht: Springer Netherlands, 1980, p. 164, 174-176.

vezes se nota uma abordagem fundacional às matemáticas.

Em síntese, *protasis*, *ekthesis*, *apodeixis* e *sumperasma* são termos técnicos usados por Aristóteles em *Analíticos primeiros, Tópicos* e *Retórica.* A protasis euclidiana pode ser descritiva (enunciado-teorema) ou prescritiva (enunciado-problema), ao passo que as de Aristóteles, em geral, são descritivas[128]. Não há indícios de que a *ekthesis* aristotélica tivesse relação com argumentos diagramáticos, tal como em Euclides. Aristóteles é bastante claro ao dizer que a demonstração matemática não pode ser a respeito do diagrama, embora conceda que os raciocínios possam ser acompanhados por imagens. Isso ajuda a explicar a ausência de algo equivalente à *kateskeue* em seus textos. A *apodeixis* euclidiana não é um silogismo *in forma*, mas, a princípio, poderia ser analisada em alguma das três figuras. A *diorismos* também está ausente dos textos aristotélicos. Como visto, é um termo técnico dos matemáticos, vinculado à tradição de resolução de problemas.

2.5. O método construtivo de resolução de problemas

Viu-se na Seção 2.3 em que reside a diferença entre Aristóteles e Proclus relativamente à natureza dos primeiros princípios. Aproveitemos a oportunidade para voltar aos *Analíticos posteriores,* I.10, 76b27-34. Nessa passagem, que provocou a confusão em Proclus, Aristóteles fala de proposições supostas sem justificação no contexto de uma demonstração, embora demonstráveis, ou dentro da própria teoria na qual são suposições, ou em outra teoria superior a partir de outros princípios. Tais suposições ou são hipóteses ou postulados, a depender dela estar ou não em conformidade com as crenças de um sujeito. Agora, o que os intérpretes têm deixado escapar é que o uso de suposições demonstráveis é bastante comum na prosa matemática, quer seja ela antiga, quer seja contemporânea.

Nos *Elementos*, toda configuração diagramática na *ekthesis* ou na *kateskeue* decorre da aplicação dos postulados de construção, quer seja uma aplicação direta, i.e., quando a configuração é composta apenas por uma reta ou uma circunferência, quer seja uma aplicação indireta, i.e., quando a configuração exige como justificativa um problema previamente resolvido, o que, em última instância, pode ser reduzido aos três primeiros

[128] Exceção feita aos silogismos práticos, associados com a ação em geral e a ação moral em particular. Nas poucas vezes que são mencionados, percebe-se que pelo menos uma de suas premissas é uma frase imperativa (ou que contém um imperativo). Por exemplo: todo homem *deve ter* uma alimentação saudável (premissa), Sócrates é homem (premissa); logo, Sócrates *deve ter* uma alimentação saudável (conclusão). Os silogismos práticos são mencionados em *Do movimento dos animais*, 701a7, e *Ética Nicomaqueia*, Livro VI, 1144a31.

postulados[129]. Pode-se dizer, por analogia, que os únicos instrumentos de desenho admissíveis na geometria euclidiana são a régua não graduada e o compasso.

O que Aristóteles chamou de princípio relativo-a-quem-aprende é equiparável às configurações diagramáticas decorrentes da aplicação indireta dos postulados de construção. Ou seja, o início do raciocínio é uma construção para a qual já há uma solução prévia. Euclides não diz como são construídas as figuras retilíneas nas cinco primeiras proposições do Livro XIII. Ele apenas comanda. Se se trata de uma postulação ou hipótese, vai depender das crenças do sujeito que está aprendendo; o que importa é que há uma justificativa dessa construção: a Proposição I.46. Mas o texto nem sempre é explícito a esse respeito. Deve-se considerar que os meios através dos quais se chegou a uma configuração costumam ser *subentendidos* por parte do sujeito ou da audiência.

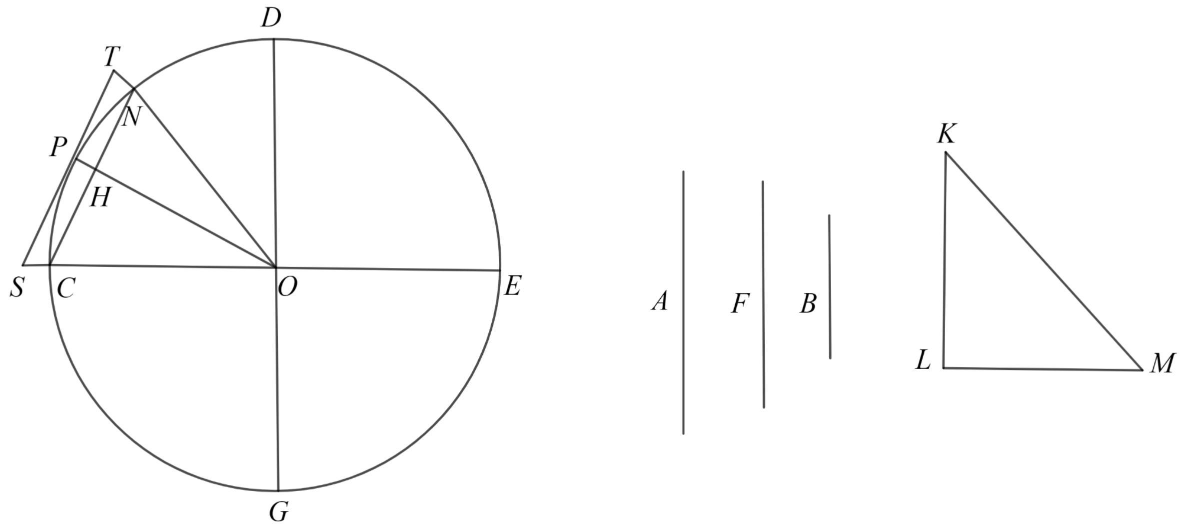

Figura 3: diagrama correspondente à proposição I.3 de *De sphaera et cylindro*

Alguns autores contemporâneos têm especulado acerca de uma suposta "caixa de ferramentas" (*tool-box*) que permitiria ao sujeito de conhecimento, ou audiência, acessar tais coisas subentendidas. Reviel Netz caracteriza a *tool-box* como tipo de um conhecimento especializado relativamente a proposições introduzidas sem justificativa prévia, mas que são demonstráveis em outro tratado[130]. A *tool-box* da matemática grega, ainda segundo ele, era os

[129] Embora isso se aplique apenas aos livros de geometria, deve-se notar que os números são representados nos Livros VII-IX por meio de traços (aproximadamente) retilíneos. Ou seja, quantidades discretas representadas por quantidades contínuas.

[130] Netz ainda afirma que a *tool-box* era "internalizada" oralmente. Isso não quer dizer que o meio de comunicação de resultados matemáticos na Grécia Antiga fosse predominantemente oral. Ver Netz, *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*, Cambridge University Press, 1999, p. 216-17, 324.

Elementos. Isso é condizente com o que diz Proclus sobre o caráter propedêutico dos *Elementos.* A própria organização da obra corrobora essa interpretação, indo dos temas mais simples aos mais complexos. Pode-se especular que os estudantes deveriam memorizar as proposições, tal como se memoriza a tabuada. A presença do diagrama e o uso dos padrões de escrita ajudariam nesse processo. Esse caráter propedêutico não é incompatível com a natureza fundacional dos *Elementos* — na verdade, estranho seria não começar o ensino de matemática a partir de seus fundamentos. Mais uma vez, Aristóteles ressalta a importância da memória usando a matemática como paradigma:

> Assim como é útil na geometria ter sido treinado nos elementos e na aritmética ter conhecimento da tabela de multiplicação até a primeira dezena ajuda muito o reconhecimento de outros números resultantes da multiplicação, também nos argumentos é importante agilidade a respeito dos primeiros princípios e saber as premissas de memória[131].

As cartas que Arquimedes enviou a Dositheus ajudam a compor uma imagem da prática matemática antiga a esse respeito. O que se depreende dessas comunicações, em flagrante contraste com o estilo euclidiano, é que Arquimedes não incluía demonstrações de seus teoremas, exceto quando o colega para o qual mandava os resultados solicitava, como era o caso de Dositheus, ou quando era preciso antecipar possíveis dificuldades decorrentes do conhecimento insuficiente do interlocutor[132]. Em *De sphaera et cylindro*, Livro I, Arquimedes utiliza vários resultados contidos nos *Elementos*. Consideremos a Proposição 3 (Figura 3): dadas duas magnitudes desiguais, *A* e *B*, e um círculo, é possível inscrever um polígono no círculo e descrever outro polígono ao redor deste círculo, de modo que o lado do polígono descrito terá para o lado do polígono inscrito uma razão menor do que aquela entre a magnitude maior para com a menor. Por exemplo, ao construir o segmento *KM*, cujo comprimento é igual ao *F*, não há nenhuma justificativa textual, mas essa construção pode ser justificada pela Proposição 2 do Livro I dos *Elementos*. Para mostrar que o ângulo *NOC* é duas vezes menor do que *LKM*, Arquimedes usa outra proposição de Euclides, a saber, X.1: sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta[133].

---

[131] Aristóteles, *Tópicos*, VIII, 163b24-29. Sobre as tabuadas gregas, ver David H. Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy*, Oxford University Press, 1987, p. 238-239.

[132] Essas cartas aparecem, à moda de prefácios, no início de alguns textos. No Volume I do *Archimedis Opera omnia*: *De sphaera et cylindro* (uma carta para cada um dos dois livros) e *De conoidibus et sphaeroidibus*; no Volume II: *De lineis spiralibus* e *Quadratura parabolae*.

[133] Veja-se também Arquimedes, *De sphaera et cylindro,* I.5, I.7-8, I.12-13 (I.13 é usada por Pappus, I.94.11), I.14 (também usada por Pappus, I.390 16), I.15, I.16 (usa a Noção Comum 3; é usada por Pappus), I.24, I.30, I.32-35.

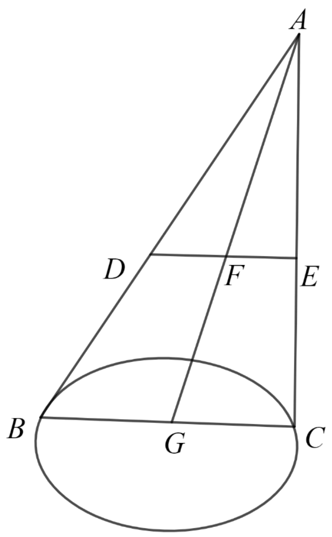

Figura 4: diagrama correspondente à proposição I.2 das *Cônicas*

O conhecimento dos *Elementos* também é pressuposto nas *Cônicas* de Apolônio (Figura 4). Em I.2, por exemplo, deve-se mostrar que, se dois pontos são tomados em lados opostos de uma superfície cônica, então o segmento retilíneo traçado entre eles também cai dentro da referida superfície. Assim, após construir o segmento *DE*, um ponto *F* é tomado ao acaso (tal como Euclides, diga-se) e é traçado o segmento *FA*. Logo, *FA* vai cair no segmento BC, pois o triângulo *BCA* está em um plano, tal como demonstrara Euclides em XI.2: caso duas retas se cortem, então ambas estão em um plano e todo triângulo está em um plano.

Deve-se ressaltar, em complemento à interpretação de Netz — antecipada por Aristóteles, embora não tenha recebido os devidos créditos —, que os *Elementos* é antes de tudo um tratado de fundamentação matemática. Sob tal perspectiva é de suma importância o estabelecimento dos princípios e a explicitação da dependência matemática dos teoremas. A finalidade é organizar e não só pesquisar e testar novas técnicas de demonstração. Nisso reside a diferença, talvez a principal, entre Euclides e Arquimedes. Por outro lado, os *Elementos* não é apenas uma coleção de teoremas. Nele se encontra também um tratado de resolução de problemas.

Os matemáticos antigos classificaram os problemas geométricos em *planos* (*epipeda*), *sólidos* (*sterea*) e *lineares* (*grammika*). Os problemas planos são solucionáveis mediante a reta e a circunferência, *i.e.,* através dos postulados de construção de Euclides. Os problemas sólidos são solucionáveis mediante as seções cônicas (parábola, elipse e hipérbole). Os problemas lineares são solucionáveis por meio de construções mais complexas, envolvendo a espiral, a quadratriz, o concóide e o cissóide[134]. Eis porque os matemáticos discutiam as condições de resolução (*diorismos*). Por outro lado, se um problema geométrico é resolvido através de meios mecânicos, como as espirais de Arquimedes, deve-se indagar também se tal solução é genuinamente geométrica.

O conhecimento matemático também engendra uma atividade intelectual baseada na resolução de problemas por meios construtivos. W. R. Knorr vai além e afirma que os problemas matemáticos não seriam apenas meios de alcançar conhecimento matemático, senão seriam, eles mesmos, "*expressão de conhecimento matemático*"[135]. "Descobrir como construir a solução de problemas é um objeto de pesquisa mais elevado, mesmo à parte do âmbito dos teoremas"[136]. Isso não quer dizer, como já esclarecido, que os matemáticos antigos estavam interessados em construções físicas, embora a literatura mencione alguns desses, também. "Mas tampouco enfatizavam o aspecto puro da teoria sob pena de exclusão do interesse nos aspectos práticos de seus resultados"[137].

Os problemas geométricos resolvidos mediante os postulados construtivos não pertencem ao rol de questões relativas à experiência. Pode-se, portanto, separar os problemas teóricos, como os da geometria e os da astronomia[138], respectivamente, e os problemas práticos, como os da medicina e os da engenharia. Esclarece Proclus: "Mas seu uso especial nas matemáticas é para denotar alguma coisa proposta para construção teórica, visto que as construções realizadas aí são feitas em função da teoria"[139]. Certamente ele conhecia os métodos mecânicos e a dificuldade em encaixá-los nessa dicotomia. A fundamentação geométrica desses métodos dependeria da possibilidade de inferir a existência dos objetos geométricos a partir das definições numa sequência dedutiva, posto que somente a *apodeixis* pode ser considerada demonstração.

Talvez Proclus quisesse mostrar que a distinção entre problemas e teoremas nos *Elementos* pretendia antecipar objeções sobre a existência dos objetos sobre os quais tratam as demonstrações. (Outra vez a sombra dos pirronistas.) Proclus aceita a identificação entre construção geométrica e demonstração de existência. Na geometria euclidiana, o modo de existência dos objetos matemáticos é dado pela construção. Diz Proclus: "A menos que ele [o geômetra] tenha demonstrado a existência de triângulos e seus modos de construção, como

[134] Ver Pappus, *Coleção*, Livro III.
[135] Knorr, Construction as Existence Proof in Ancient Geometry, *Ancient Philosophy* 3, 1983, p. 129 (ênfase do autor).
[136] *Ibid*, p. 129.
[137] *Ibid,* p. 129.
[138] Platão, *República*, 530b.
[139] Proclus, *In Euclidis*, 221.

poderia discorrer sobre suas propriedades essenciais e a igualdade dos seus ângulos e lados?”[140]. Essa indagação sugere que só poderia haver demonstração de propriedade de alguma figura na geometria euclidiana se houvesse previamente uma demonstração de existência dessa referida figura. Essa limitação imposta pelo método construtivo, todavia, pode ser pensada como referente a objetos cuja existência decorre de métodos não-geométricos[141].

As reflexões sobre a linguagem dos geômetras não decorrem de simples curiosidade gramatical. Trata-se de um questionamento sobre a natureza das construções geométricas e em que se diferenciam das demais construções ordinárias. Isso não quer dizer, como faz Knorr, que a principal diferença entre as matemáticas antiga e contemporânea esteja nessa mudança de ênfase de uma prática baseada em soluções de problemas para uma teoria em cujo núcleo está a elaboração de requisitos lógicos das demonstrações[142]. Mesmo Hilbert entendia que a matemática deveria lidar com problemas cuja origem encontra-se *fora* de sistemas axiomático-formais. Os problemas que atiçam a criatividade dos matemáticos muitas vezes têm origem na experiência. O mesmo se pode dizer das técnicas desenvolvidas para descobrir novos resultados. A expressão teórica desses problemas, bem como a demonstração dos resultados e a discussão dos meios legítimos de demonstração, pertencem ao rol de questões posteriores.

Que os matemáticos usem técnicas empíricas para a descoberta de novos resultados e técnicas não implica que as matemáticas sejam ciências empíricas. Mas, onde os diagramas deveriam ser encaixados? Viu-se que Proclus, provavelmente seguindo Aristóteles, identificou as demonstrações à *apodeixis*, i.e., à dedução feita por meio da linguagem. Essa interpretação, porém, ignora a importância do método construtivo de resolução de problemas, método esse que Aristóteles não discute nos textos que chegaram aos dias atuais. O método construtivo euclidiano contempla o uso de diagramas. Deve-se investigar, portanto, se o uso dos diagramas compromete os resultados alcançados por Euclides.

[140] Proclus, 233-235.
[141] “Tome-se os problemas de trissecção do ângulo e a duplicação do cubo, omitidos dos *Elementos*: se pudéssemos comunicar a Euclides as descobertas da moderna teoria algébrica, mostrando que as soluções desses problemas são impossíveis sob as restrições das técnicas de construções postuladas nos *Elementos*, ele concluiria que as entidades construídas nesses problemas não existem de fato?” (Knorr, Construction as existence proof in ancient geometry, *Ancient Philosophy*, v. 3, n. 2, 1983, p. 130).
[142] Knorr, Construction as existence proof in ancient geometry, *Ancient Philosophy*, v. 3, n. 2, 1983, p. 126, grifos nossos. Ver também Lassalle Casanave, *Por construção de conceitos: Em torno da filosofia kantiana da matemática*, Rio de Janeiro, 2019 p. 190.

2.6. A respeito do uso de diagramas

As construções geométricas eram muito importantes para a prática matemática centralizada em torno da resolução de problemas. Em Euclides, em especial, as construções dependem da cooperação entre a parte discursiva e a parte visual, i.e., o diagrama. Não é trivial o debate sobre a linguagem prescritiva e o uso dos diagramas. Ao contrário, as objeções de Platão e Aristóteles apontam para uma mudança profunda a respeito da natureza do conhecimento matemático[143]. Afinal, sendo os diagramas artefatos físicos, como distinguir o método construtivo de um método empírico? Tal preocupação aparece na seguinte passagem de Proclus:

> Quando eles [os matemáticos] mostram que algo é verdadeiro acerca de uma dada figura, inferem que é verdadeiro em geral, indo do particular para a conclusão universal. Porque eles não usam as qualidades particulares do objetos [sensíveis], senão que desenham o ângulo ou a linha reta para pôr o-que-é-dado perante nossos olhos, consideram que o que inferem sobre um dado ângulo ou linha reta pode ser asserido identicamente para cada caso similar. Portanto, eles passam para a conclusão universal para que não suponhamos que o resultado está confinado à instância particular. Esse procedimento é justificado, pois, para a demonstração, eles usam os objetos exibidos nos diagramas não como essas figuras particulares, mas como figuras que aparentam com outras do mesmo tipo. Não é por ter tamanho tal e tal que o ângulo em minha frente é cortado; é por ser retilíneo e nada mais. O tamanho particular é uma característica do ângulo dado [no diagrama], mas o ter lados retilíneos é uma característica de todo ângulo retilíneos[144]

A literatura especializada sempre reconheceu que a matemática grega compreendia também o uso de diagramas. Nos *Elementos*, até mesmo os números são representados por configurações de linhas. Apesar disso, predomina esse entendimento de que demonstrações heterogêneas, tais como as de Euclides, são imperfeitas. Não foi senão a partir da segunda metade do século passado que essas inferências baseadas em diagramas começaram a receber uma ampla defesa. Vejamos, então, como essa defesa permite reabilitar as demonstrações parcialmente diagramáticas de Euclides.

À época de Euclides, i.e., século III a.C., a régua e o compasso eram os instrumentos usados para desenhar diagramas, tanto os bidimensionais (Livros I-X, XIII.1-12) quanto os tridimensionais (Livros XI-XIII.13-18). Os diagramas científicos em geral, e os

[143] Julia Annas, por exemplo, assume que a crítica de Platão era dirigida contra o uso dos diagramas. Ela estava pensando em Euclides: "This geometry [i.e., a de Euclides], as is well known, relies at various points on our intuitions about space. Plato is criticizing geometers for taking for granted various basic truths and key concepts just because they seem to be so clearly given in experience" (Annas, *An Introduction to Plato's Republic*, 1981, p. 278-279).
[144] Proclus, *In Euclidis*, 207.5-22.

matemáticos em particular, são esquemas de retas e curvas aos quais são acrescentadas letras. A importância dessas letras não deve ser subestimada. Por meio das letras a entrada textual pode controlar a saída diagramática, de modo a evitar desvios, especialmente quando o diagrama não é previamente apresentado e deve ser reconstruído a partir do texto. Isso evitaria que a comunicação de resultados científico fossem prejudicadas por causa dos meios de documentação usados — os papiros, o óstraco e as tábuas de cera[145].

Os textos matemáticos sempre eram acompanhados por diagramas[146]. Euclides não era exceção. Contudo, a imagem do geômetra rabiscando seus diagramas no chão de areia não corresponde à prática da época[147]. O mais provável é que fossem usadas as tábuas de cera, recurso muito comum na Antiguidade — em Roma as *tabulae ceratae* eram usadas na documentação jurídico-administrativa, além da aplicação pedagógica — chegando até a Idade Média[148]. Essas tábuas eram usadas na Grécia desde o séc. VIII a.C[149]. A importância desses recursos visuais se nota também em algumas passagens de Platão e Aristóteles. Em Platão, pode-se inferir a presença de algum diagrama na Analogia da Linha da *República*. A trama do *Menon* relativamente à resolução do problema geométrico de encontrar uma reta num

---

145 Sobre os vestígios arqueológicos do uso desses meios de documentação, ver Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy*, Oxford University Press, 1987.

146 Eis porque o vocábulo διαγράμμα (*diagramma*) em Aristóteles significar proposição matemática. Veja-se *Analíticos primeiros*, 41a14; *Meteorológicos*. 375b18; *Categorias,* 14b1; *Metafísica*. 998a25, 1051a22; *Refutações sofísticas*, 175a27. Pappus também fala em teoremas ou diagramas (θεωρήματα ήτοι διαγράμματα). Isso não quer dizer, tanto num caso quanto no outro, que "demonstrar um diagrama" seja equivalente fazer um desenho. O fato de διαγράμμα poder ser sinônimo de proposição ou teorema matemáticos obrigava os matemáticos gregos a adotarem alguma outra expressão para se referir ao desenho que acompanhava a parte textual. Uma das alternativas era a expressão *katagraphe* ("desenho/desenhando"). Veja-se Euclides, *Elementos*, III.33, IV.5 e XII.4; Apolônio, *Cônicas*, IV.27. Arquimedes fala em σχήματα. Pappus usa a palavra *hupographe* (ver VII.638.17, 670.1-2).

147 Essa cena é descrita por Aristófanes em *Nuvens* (v. 175-179), mas apenas por razões cômicas. Sócrates joga cinza no chão e pega um instrumento de ferro parecido com um compasso, mas, ao invés de desenhar um diagrama, algo insinuado pelo contexto da passagem, o instrumento é usado para furtar roupas. Em *De re publica* (I.17.28-29), Cícero apresenta a seguinte fábula. Após um naufrágio, alguns homens começam a vagar pelo litoral de um território desconhecido até que encontram figuras geométricas desenhadas na areia; eles comemoram, pois isso não só significava vida humana, mas também homens eruditos. Quando Vitrúvio (*De Architectura*, VI.1) repete essa história, é dito que isso aconteceu de fato com o filósofo chamado Aristipo. Sobre Aristipo, ver Diógenes Laércio (*Vidas*, II.65-102); Platão, *Fédon*, 59C; Xenofonte, *Memoráveis*, II.1. Também contribuiu para essa lenda a história da morte de Arquimedes durante a tomada de Siracusa pelos romanos em 212 a.C. Tito Lívio relata que Arquimedes fora assassinado por acidente enquanto contemplava um diagrama que desenhara na poeira (*Ab Urbe Condita*, XXV.31).

148 Daí a origem etimológica dos vocábulos tabela, tabuada, tabelião (daí tabelionato), tabuleiro. É também daí a origem da conhecida expressão *tabula rasa*.

149 A superfície de cera, onde se escrevia ou desenhava, estava sobreposta a uma de madeira. O instrumento usado para escrever ou apagar era o *stylus*. A funcionalidade das tábuas de cera é comparável à dos cadernos de papel: poderiam ser usadas para acompanhar preleções; eram facilmente transportadas; eram facilmente acessadas, etc. Em comparação ao papel, as tábuas são reutilizáveis e mais resistentes. O British Museum contém um exemplar grego (Add MS 34186) do séc. II d.C. Trata-se de uma tabuada de multiplicação.

quadrado dado que permita construir outro quadrado com o dobro da área também gira em torno de um diagrama[150].

Quanto a Aristóteles, vale notar que algumas passagens são mais inteligíveis quando o diagrama correspondente é reconstruído, como se nota na descrição das cores do Arco-Íris (*descriptio colorum iridis*) presente no Livro III dos *Meteorológicos*, 373a, 375b18 (Figura 5)[151]. Esses diagramas não estão presentes em manuscritos mais antigos. Nesse sentido, a decisão editorial de alguns comentadores do século XVI parece estar mais próxima do que diz Aristóteles no Livro III do *De anima*, a saber, que a mente *nunca* pensa sem imagens[152].

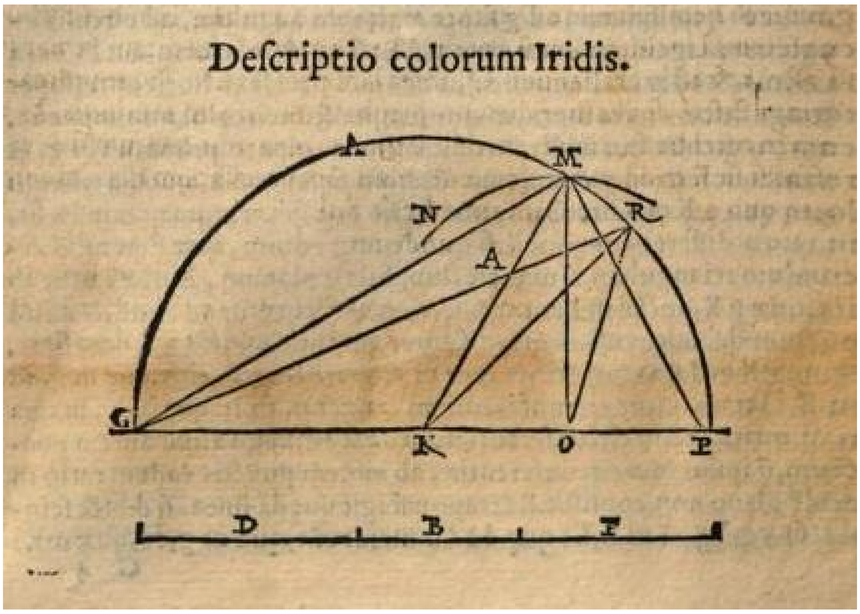

Figura 5: reconstrução de diagrama geométrico a partir dos *Meteorológicos* de Aristóteles. In *Omnia opera Aristotelis Stagiritae Omnia* [...], vol. VI, 1560, 52r.

Se o uso dos diagramas era tão comum na Grécia Antiga, por que tamanha preocupação? A dimensão deste problema pode ser apreendida através dalguns exemplos de falácias geométricas: a "demonstração" que todos os triângulos são isósceles[153]. Seja um triângulo *ABC*; é preciso mostrar que o lado *AB* é igual ao *AC*. Seja o bissetor interno do

---

[150] Mas a atividade do geômetra não se limita a produzir diagramas (ποιοῦσι τὰ διαγράμματα), como adverte Platão em *Eutidemo* 290C. Ver *Teeteto* 169A.

[151] Outras passagens que exigem a presença de algum diagrama são: *De Memoria* II, 452-253b; *Ética a Nicômaco* V, 1131a24-b20.

[152] Aristóteles, *De anima*, III.7, 431a16.

[153] Maxwell, *Fallacies in mathematics*, Londres, 1959.

ângulo *BAC*, o qual encontra a perpendicular à reta *BC* no ponto *C*, cortando *BC* em duas. Seja traçada *OD*, *OQ* e *OR* perpendiculares às *BC*, *CA* e *AB*, respectivamente.

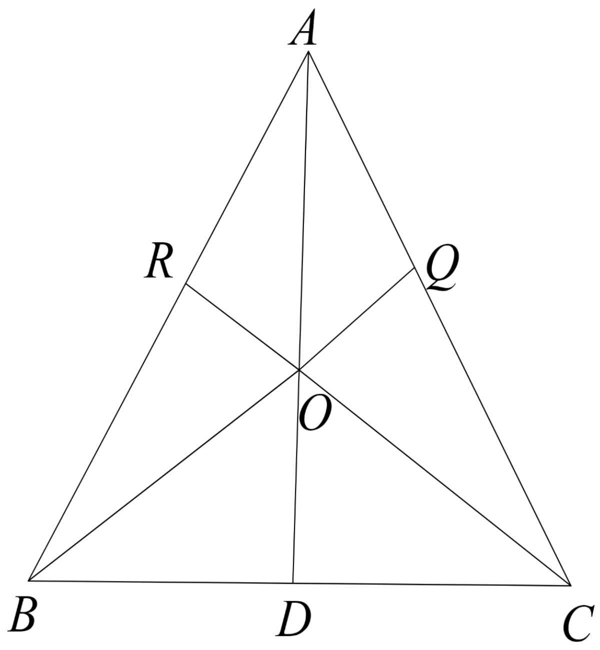

Figura 6: diagrama correspondente a um exemplo de falácia geométrica de Maxwell

Logo, como *DO* é igual a si mesmo, *DB* é igual à *DC* e os ângulos *ODB* e *ODC* são iguais, segue-se por I.4 que o triângulo *ODB* é igual a *ODC* e o lado *OB* é igual a *OC*. De maneira similar, prova-se que, por ser *AO* igual a si mesma e os ângulos *RAO* iguais aos *QAO* e *ARO* a *AQO*, então os triângulos *ARO* será igual ao *AQO*; logo, *AR* é igual à *AQ*. Ora, dos triângulos *OBR* e *OCQ*, *ORB* é igual a *OQC* por serem retos. E já foi provado a *OB* igual à *OC* e a *OR* igual à *OQ*. Logo, os triângulos *ORB* e *OQC* são iguais e disso se segue a igualdade entre *RB* e *QC*. E como a *AB* é igual à *AR* mais *RB* e também igual à *AQ* mais *QC*, então *AB* é igual a *AC*.

O importante a perceber neste argumento é a indeterminação gráfica a partir da construção dos pontos *O, R* e *Q*. Em momento algum foi dito no texto se a perpendicular à *BC* e a bissetora do ângulo *BAC* encontrar-se-ão internamente ou externamente ao triângulo *ABC;* sobre os *R* e *Q*, não há garantias que cairão sobre as *AB* e *AC*, ou se cairão nas prolongações destas. No segundo caso, *Q* e *R* caem além dos respectivos segmentos *AB* e *AC*. Ora, disso pode-se inferir que *AB* é igual à *AR* menos *RB*, igual também a *AQ* menos *QC*; esta subtração, por sua vez, igual à *AC*. Logo, para qualquer figura retilínea trilátera, dois dos seus respectivos lados são sempre iguais; portanto, todo triângulo é isósceles.

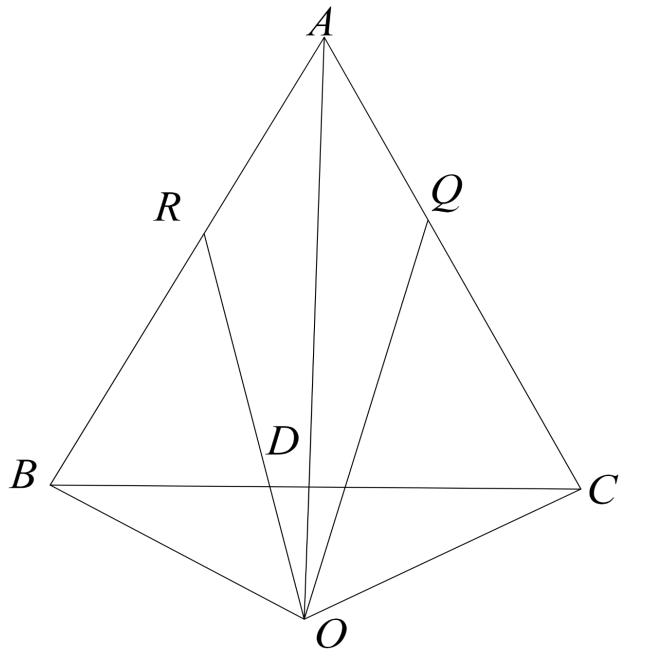

Figura 7: diagrama correspondente a um exemplo de falácia geométrica de Maxwell

Apesar das objeções já mencionadas, não se pode acusar Euclides de ter incorrido nalgum erro. Como notou Kenneth Manders, a estabilidade das demonstrações euclidianas é explicada a partir da suposição de uma prática matemática engendrada pelos *Elementos*, de maneira que aspectos epistêmicos e normativos, para além dos lógicos, contribuem para que alguém retire dos diagramas um tipo bem específico de afirmações[154]. Para mostrar que é possível usar legitimamente os diagramas na obtenção de conhecimento geométrico ele propõe duas distinções. Em primeiro lugar, ele distingue, nas provas euclidianas, texto e diagrama como fontes legítimas de justificação matemática. A segunda distinção separa *afirmações exatas*, fornecidas, em geral, pela parte linguística, das *afirmações co-exatas*, fornecidas pelo diagrama.

As afirmações exatas dizem respeito a predicados métricos aduzidos primeiramente nas definições. Por exemplo, ser uma reta, ter extensão, ser maior, menor ou igual a outra reta, etc. Independente do quão precisos sejam, os diagramas não podem satisfazer tais predicados. Não é a inspeção sensorial do diagrama que diz se uma linha dada é reta ou se é igual a alguma outra. Torta ou não, seu desenho será sempre imperfeito. Nisso os filósofos antigos estavam de acordo. O que Manders notou é que os predicados métricos são justificados nas demonstrações *por referência ao texto*, quer seja um dos princípios, quer seja uma proposição já demonstrada.

[154] Manders, The euclidean diagram. In: Paolo Mancosu, *Philosophy of Mathematical Practice*. Nova York: Oxford University Press, 2008. p. 80–130.

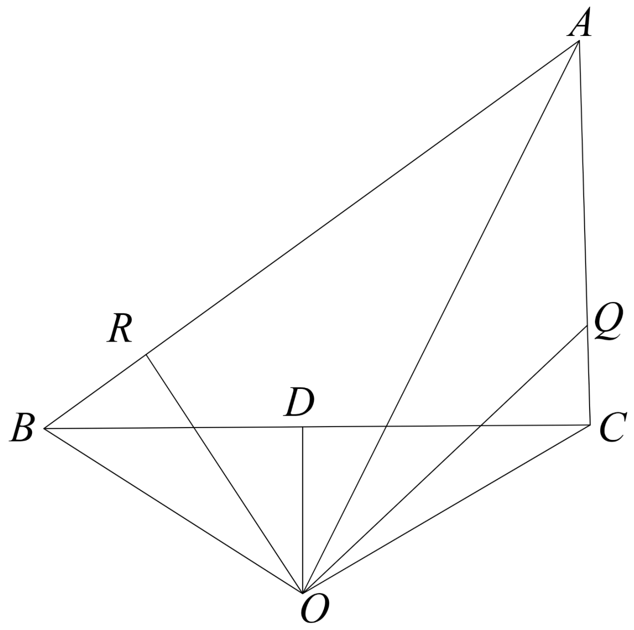

Figura 8: diagrama correspondente a um exemplo de falácia geométrica de Maxwell

As afirmações co-exatas são aquelas que podem ser extraídas das relações exibidas pela topologia do diagrama, i.e., a sua aparência gráfico-espacial. À medida em que os postulados 1-3 são usados, o diagrama construído passa a exibir algumas relações que, embora façam parte da demonstração, não são justificadas por nenhum elemento textual. Decorrem do diagrama as interseções entre linhas, quer sejam segmentos retilíneos, quer sejam círculos, ou ambos; de igual maneira a ordem ou posição dos pontos sobre uma reta ou segmento de reta; o reconhecimento de regiões e as relações mereológicas entre o todo e suas respectivas partes; a contiguidade, inclusão de regiões ou o corte de regiões a partir de uma reta[155].

Alguns exemplos ajudam a aplicar essas distinções. Euclides inicia I.2 com dois objetos dados pelo texto: o ponto *A* e a reta *BC* (Figura 9). Depois, introduz a reta *BA*, autorizada pelo Postulado 1, o triângulo equilátero *DAB*, pelo problema I.1, e os círculos *CGH* e o *GKL*, pelo Postulado 3. A saída diagramática acompanha cada uma destas construções, mas em momento algum o diagrama é usado para justificar as afirmações feitas. Isso só acontece quando os círculos são traçados (Postulado 3) e cortam as retas *DE* e *DF*, respectivamente. É neste momento que a saída diagramática mostra dois tipos de relações não

[155] Manders, The euclidean diagram. In: Paolo Mancosu, *Philosophy of Mathematical Practice*. Nova York, 2008, p. 93.

verbalizadas pela entrada textual: as interseções nos pontos *G* e *L* bem como suas respectivas ordens, i.e., que *G* está entre *F* e *G*, tal como entre *D* e *F*, o mesmo valendo para os pontos *B*, na reta *DF*, e os *A* e o *L*, na reta *DE*.

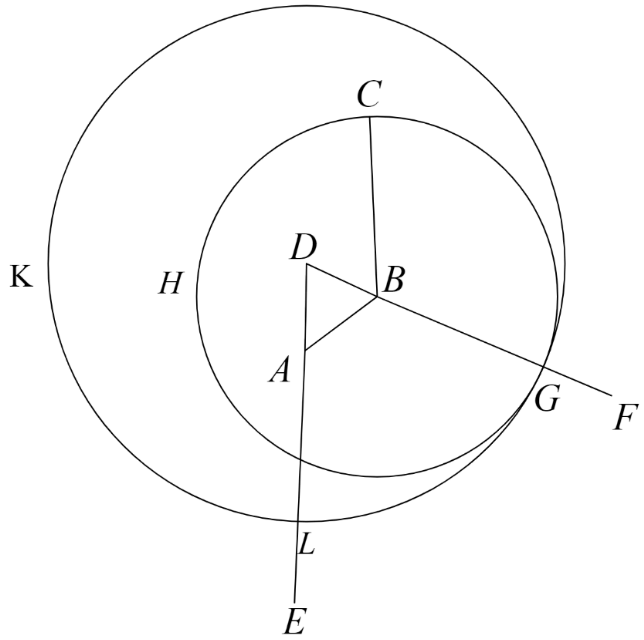

Figura 9: diagrama correspondente à Proposição I.2

O que permite a Euclides usar os diagramas sem inferir uma falsidade, segundo o argumento de Manders, é a *invariabilidade topológica* dos diagramas desenhados. Por invariabilidade topológica entende-se a capacidade das representações gráficas continuarem a exibir certas relações apesar de deformações que possam ser feitas à sua aparência. Recorde-se que a crítica principal ao uso dos diagramas é que eles não podem satisfazer os atributos exatos previamente fixados nas definições. A proposta de Manders não muda isso. Em vez disso, aponta para o fato de ser possível um diagrama desenhado à mão livre ainda exibir as relações topológicas introduzidas previamente pelos postulados. Não se trata de desenhar um círculo bem redondinho, senão de assegurar que haja uma diferença entre interior e exterior. Tivesse o círculo *CGH* sido desenhado com a aparência aproximada a uma elipse ou as retas *DA* e *DL* apresentassem uma ligeira variação curvilínea e o raciocínio permaneceria o mesmo. Porque o que diz que *GCH* é um círculo cujos raios, todos eles, são iguais, é sua definição, bem como que *DA* e *DL* são retas com tais e tais propriedades.

Isso não quer dizer que os diagramas deveriam ser sensivelmente imprecisos. Essa precisão, alcançada por meio da régua não graduada e do compasso, é necessária para garantir *uniformidade*. A proposta de Manders prevê também uma *disciplina diagramática*, no âmbito da qual algumas habilidades deveriam ser desenvolvidas com a finalidade de assegurar um controle sobre o desenho dos diagramas[156]. Afinal, alguém poderia ser conduzido ao erro caso o desenho do círculo não separasse nitidamente o interior e o exterior ou se a linha traçada apresentasse falhas. Seria, então, essa dimensão *normativa* da prática matemática que assegura o uso correto dos diagramas[157].

O principal erro nas objeções às demonstrações euclidianas foi assumir que qualquer afirmação era justificada pelo diagrama. Euclides não procede assim. Nos *Elementos*, uma propriedade exata nunca é extraída dos diagramas. Já as propriedades topológicas, as co-exatas, não dependem da precisão com que os diagramas são desenhados, senão do controle sobre a manipulação da figura, controle este que depende da estabilidade da prática matemática.

2.7. Observações finais

Euclides apresenta três tipos de princípios nos *Elementos*: definições, postulados e noções comuns. Por não haver muitas informações a respeito da composição da obra, além do suposto nome do autor, o mais comum é analisá-la a partir dos três princípios estudados por Aristóteles nos *Analíticos posteriores*: definições, hipóteses e axiomas. Na época de Proclus isso já não era novidade. Viu-se, porém, que fora dessa comparação não havia consenso sobre a natureza desses princípios — se demonstráveis ou não —, e quais diferenças específicas. Até mesmo a terminologia mudava de autor para autor. Arquimedes é o melhor exemplo a esse respeito. A diferença mais importante entre Euclides e Aristóteles são os postulados de construção, presentes apenas nos *Elementos*. Viu-se também que Proclus entendia que os postulados poderiam ser reduzidos às definições e noções comuns, no caso dos postulados

---

[156] Manders, The euclidean diagram, In Paolo Mancosu, *Philosophy of Mathematical Practice*. Nova York, 2008, p. 89-97.

[157] J. M. van der Ham e co-autores conduziram uma pesquisa empírica com o objetivo de estudar fenômenos cognitivos por trás da identificação de exatos e co-exatos. Foram escolhidos dois grupos, o primeiro composto por 50 senegaleses, e o segundo, por 30 holandeses. Depois, cada grupo foi novamente dividido em dois: o de pessoas que receberam uma educação matemática e o de pessoas que não receberam educação matemática. van der Ham *et al* concluíram que a identificação dos co-exatos não é imediata, como havia sugerido Manders. Os autores apontam para a cultura como potencial causa da discrepância nas performances dos participantes dos grupos principais. Ou seja, culturas diferentes privilegiam tipos diferentes de argumentação e, por conseguinte, tipos diferentes de habilidades. Isso não impossibilita que um sujeito de uma cultura possa aprender as táticas argumentativas de outra cultura. Mas, no caso específico da geometria, Ham *et al* postulam uma "intuição espacial" que supostamente seria universal e necessária para o entendimento da provas euclidianas. Esta terminologia é estranha ao texto de Manders. E mais estranha ainda é que uma pesquisa empírica com uma base amostral tão limitada pretenda justificar tal generalização. Ver J. M. van der Ham *et al.,* Universal intuitions of spatial relations in elementary geometry. *Journal of Cognitive Psychology*, 29(3), p. 269-278, 2017.

construtivos (1-3), ou demonstrados (postulados 4-5). Argumentamos que essa tese tem origem em certa interpretação da Analogia da Linha na *República*, numa leitura equivocada dos *Analíticos posteriores* e nas objeções dos pirronistas. Ressaltamos que essa interpretação contraria a doutrina aristotélica de princípios indemonstráveis.

A Seção 2.4 discutiu a organização de Proclus e a tese segundo a qual apenas a dedução linguística deveria ser considerada demonstração. *Protasis, ekthesis, apodeixis e sumperasma* são termos técnicos usados por Aristóteles nos *Analíticos primeiros*, *Tópicos* e *Retórica*. A ausência de algo equivalente à *kateskeue* nos textos aristotélicos reforça a originalidade do método euclidiano. A *diorismos* também está ausente dos textos aristotélicos, mas há precedente nos tratados matemáticos vinculados à tradição de resolução de problemas.

A Seção 2.5 questionou a primazia dos teoremas em relação aos problemas em Proclus. Disso resultaria uma identificação entre conhecimento matemático e demonstração de teoremas. O comentador também desconsidera o papel demonstrativo das construções, identificando na parte dedutiva o núcleo do argumento matemático. Apesar disso, não se nota uma colisão de Proclus e Euclides acerca do uso dos diagramas.

A Seção 2.6 mostrou que o principal erro nas objeções às demonstrações euclidianas foi assumir que qualquer afirmação era justificada pelo diagrama. Nos *Elementos*, salvo em condições excepcionais, uma propriedade exata não é extraída dos diagramas. Já as propriedades topológicas, i.e., as co-exatas, não dependem da precisão com que os diagramas são desenhados, senão do controle sobre a manipulação da figura, controle este que depende da estabilidade da prática matemática.

3. Formalismo metamatemático e dispensabilidade de diagramas

3.1. Resumo do capítulo

Viu-se no Capítulo 2 que a doutrina aristotélica do conhecimento demonstrativo, reivindicada por Proclus para explicar partes da geometria euclidiana, parece engendrar uma concepção de demonstração homogênea, uma vez que só são admitidas proposições, cujo meio de expressão é a linguagem. Tal entendimento, se verdadeiro, aponta para algo original de Aristóteles, uma vez que os registros de sua época mostram que os raciocínios matemáticos dependiam muito do diagrama. Neste capítulo estudaremos a maneira como a matemática contemporânea se aproxima desse ideal de demonstração e como isso tem afetado os *Elementos*. Consideraremos, em primeiro lugar, o sistema axiomático-formal apresentado por Hilbert em *Fundamentos da geometria* de 1899. Os argumentos de dispensabilidade de diagramas que consideramos até aqui são extraídos a partir dessa obra. Em segundo lugar, discutiremos o sistema formal de Avigad, Dean & Mumma, o qual pretende formalizar também os atributos que Manders chamou de co-exatos.

3.2. Introdução

Os comentários de Proclus aos *Elementos* são responsáveis pelas seguintes tendências na história da matemática. Em primeiro lugar, que a autoevidência é um critério para escolha dos princípios científicos. Em segundo lugar, que os postulados não são indemonstráveis, pois os construtivos seriam redutíveis às definições, ao passo que os outros dois seriam, na verdade, teoremas. Em terceiro lugar, a identificação das demonstrações euclidianas ao núcleo dedutivo (*apodeixis*). No tocante aos diagramas, Proclus os considerava imitações projetadas pela imaginação, mas, uma vez representados por traços físicos, não deveriam ser usados como fonte de justificação. Ao longo deste capítulo, será possível perceber essas tendências ainda na matemática contemporânea. Nosso principal objetivo é explicar por que os argumentos de dispensabilidade de diagramas são frequentes nessa literatura mais recente e não entre os antigos.

Argumentou-se que a compreensão das demonstrações heterogêneas de Euclides perpassa pela suposição de uma prática matemática em cujo cerne estaria a resolução de problemas por meio da cooperação entre texto e diagramas. A suposição dessa prática, que pertence à sua dimensão normativa concernente ao uso regrado de diagramas, ajuda a explicar a estabilidade da matemática euclidiana; ajuda a entender também o porquê da dependência parcial das demonstrações euclidianas do uso dos diagramas jamais resultou em inferências falaciosas.

De um ponto de vista lógico, pode-se argumentar que o mais relevante são os resultados matemáticos que Euclides alcançou, independente de qual tenha sido a estratégia inferencial adotada por ele. Esta é a abordagem axiomática de Hilbert em *Fundamentos da geometria* (1899). A partir de finais do século XIX e durante a maior parte do século XX tornou-se comum criticar as demonstrações euclidianas como logicamente imperfeitas em virtude do uso de diagramas. Hilbert tornou-se a principal referência no que diz respeito à geometria, alcançando um patamar até então habitado por tratados como os *Elementos* de Euclides. Desde então, tornou-se comum apelar ao sistema axiomático-formal apresentado por ele para mostrar a insuficiência dos princípios de Euclides. O argumento mais frequente é que as demonstrações euclidianas têm "lacunas" cuja devida correção seria através do acréscimo de novos princípios que pudessem verbalizar as relações gráfico-espaciais exibidas pelos diagramas.

Ainda que se possa considerar os *Fundamentos* como um tipo de "atualização" da geometria euclidiana, a linha filosófica esboçada na obra não pretende resgatar uma interpretação fidedigna do método demonstrativo apresentado nos *Elementos*. Em vez disso, Hilbert chama atenção para a necessidade de se investigar os atributos metateóricos do conjunto axiomático a partir do qual os teoremas matemáticos, incluindo os euclidianos, são deduzidos. O primeiro deles é a consistência, i.e., a demonstração da impossibilidade de se deduzir uma contradição a partir do conjunto axiomático. Por outro lado, deve-se também demonstrar que os axiomas são *independentes* entre si, i.e., que não é possível deduzir um axioma a partir dos demais. Com isso, passaríamos do estudo duma teoria matemática particular, como o caso da geometria euclidiana, para um investigação acerca do sistema dentro do qual esta teoria é reconstruída. Assim como Aristóteles, Hilbert também considera pertinente estabelecer exigências epistemológicas para uma teoria matemática, embora, para ele, seja suficiente investigar a relação lógica que os axiomas mantêm entre si e quais teoremas podem ser deduzidos a partir deles[158].

Como logo veremos, Hilbert não foi o primeiro a introduzir novos axiomas à geometria euclidiana. Aliás, alguns dos axiomas adotados por ele já haviam aparecido em edições mais antigas dos *Elementos*, especialmente as que surgiram nas primeiras décadas da Modernidade. Ainda que Proclus esteja correto ao atribuir aos *Elementos* uma finalidade fundacional relativamente ao conhecimento matemático codificado no Mediterrâneo até o século IV a.C., negligenciar o pertencimento dessa obra a uma tradição de resolução de problemas através de métodos construtivos oferece uma visão parcial e, por conseguinte, imperfeita. Por outro lado, rejeitamos que se possa estabelecer uma diferença entre as concepções antiga e contemporânea acerca das matemáticas segundo a centralidade dos métodos de resolução de problemas.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Discute-se na Seção 3.2 o sistema axiomático-formal apresentado nos *Fundamentos da geometria*. Chamamos atenção, em especial, para os axiomas de ordem, os quais permitem verbalizar algumas das relações usualmente extraídas dos diagramas nos *Elementos*. A Seção 3.3 mostra como os argumentos de dispensabilidade de diagramas ultrapassam os comentários de Proclus. Para além das já conhecidas alegações de imperfeição, mostra-se que essa dispensabilidade decorre da tese formalista de Hilbert. A Seção 3.4 mostra os impactos do formalismo hilbertiano ao longo do século XX. Argumentamos que um dos principais equívocos das críticas a Euclides têm origem na leitura anacrônica da geometria grega sem levar em consideração as condições específicas estabelecidas por Hilbert para seu programa de fundamentação. Tratamos disso na Seção 3.5. Na Seção 3.5 discutimos a proposta de Avigad, Dean & Mumma a respeito da formalização dos atributos co-exatos. Na Seção 3.6 comparamos as perspectivas aristotélica e hilbertiana sobre a demonstração matemática no âmbito do modelo clássico de ciência.

3.3. O sistema axiomático-formal de Hilbert

O séc. XX começa com a famosa conferência de David Hilbert na Sorbonne

[158] Nesses primeiros anos do método axiomático-formal Hilbert ainda não havia se debruçado sobre a necessidade de se demonstrar a *consistência* do sistema, i.e., que nenhuma contradição é deduzida a partir dos axiomas. Como será sinalizado ao longo deste Capítulo, a consistência tornar-se-á um objetivo nas próximas décadas após a publicação dos *Fundamentos*. Como se sabe, tal objetivo é frustrado pelos resultados demonstrados por Kurt Gödel nos anos 1930.

durante o II Congresso Internacional de Matemáticos[159]. Ele apresentou ali vinte e três problemas matemáticos que exigiriam atenção especial daquela comunidade doravante. Ninguém poderia esperar, é claro, que aqueles problemas seriam solucionados no curso das próximas décadas, quiçá dos próximos cem anos. Às vezes a solução de um problema matemático só aparece vários séculos depois. O otimismo de Hilbert era motivado pela crença que todo problema matemático ou seria afirmativamente solucionado ou ficaria demonstrada a impossibilidade da sua resolução. Não há *ignorabimus*, repetia ele[160]. Dessa maneira, ele enxergava na existência de problemas matemáticos a própria justificativa da existência dessa disciplina. Os problemas matemáticos também seriam, direta ou indiretamente, as causas do "progresso" do conhecimento matemático.

O afã de resolver problemas matemáticos vinha acompanhado por questões filosóficas sobre quais recursos eram legítimos, i.e., quais estratégias eram genuinamente matemáticas. É que apesar do conhecimento matemático começar na experiência com a descoberta de alguns atributos através da apreensão sensível de padrões e, subsequentemente, o uso de instrumentos para produção e *re*produção de desenhos, disso não se segue que a fundamentação desse conhecimento esteja na experiência, especialmente porque nada aí corresponde à exatidão matemática. Portanto, conclui Hilbert, a solução perfeita de problemas matemáticos exige demonstrações rigorosas, as quais são sequências finitas de deduções a partir de princípios.

Sob o ponto de vista axiomático-formal, cada ciência é composta por um conjunto de proposições verdadeiras, de maneira que é possível mostrar quais relações lógicas há entre as verdades de umas em relação às verdades das outras. Desse modo, deve-se destacar quais proposições têm esse caráter fundacional, i.e., são o ponto de partida das demonstrações, mas não demonstradas nem admitem demonstração dentro do sistema. Mas, isso não se mostrou

---

[159] Hilbert, Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8, 1902, pp. 437-479. Não pretendemos fazer uma exposição exaustiva da obra de Hilbert, visto que muitos temas estão além do escopo desta Tese. Nos limitamos a discutir temas que esclareçam o procedimento adotado nos *Fundamentos da geometria* relativamente à geometria euclidiana.

[160] "Essa convicção da solubilidade de todo problema matemático é um poderoso incentivo para o trabalhador. Ouvimos dentro de nós o perpétuo chamado: eis o problema. Busque sua solução. Você pode encontrá-lo pela razão pura, porque na matemática não há *ignorabimus*". Ver Hilbert, "Mathematical problems". *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8, 1902, p. 445. O otimismo hilbertiano se contrapunha a Emil DuBois-Reymond (1818-1896), responsável por cunhar e popularizar a máxima *ignoramus et ignorabimus* ("não sabemos e não saberemos") como sentença a respeito dos limites da ciência em geral. A biógrafa de Hilbert, Constance Reid, lembra que esse pessimismo era comum nas universidades alemãs em resposta ao otimismo do século XVIII, o Século das Luzes. Ver Reid, *Hilbert*, Springer-Verlag, 1996, p. 13. Hilbert reafirmaria sua visão otimista sobre o alcance do conhecimento durante toda sua vida. Em 1930, aposentado aos sessenta e oito anos, Hilbert fala a uma audiência através do rádio em Königsberg: "Não devemos acreditar naqueles que, com pose filosófica e tom de superioridade, profetizam a queda da cultura e aceitam o *ignorabimus*. Para nós não há *ignorabimus*, e na minha opinião, nem mesmo na ciência natural. Em vez do tolo *ignorabimus*, que nosso lema prevaleça: Devemos saber, Saberemos". Esse slogan encontra-se gravado em sua lápide.

suficiente. Dois eventos mostraram a Hilbert a necessidade de um estudo mais aprofundado sobre os princípios matemáticos.

Na primeira metade do século XIX surgiram as chamadas geometrias não-euclidianas. Foi principalmente por causa do *Comentário* de Proclus que tantos matemáticos — na Antiguidade, passando por matemáticos árabes na Idade Média, até chegar à Europa no século XVI — assumiram a demonstrabilidade do Postulado das Paralelas[161]. Mas, depois de tantas tentativas frustradas de alcançar uma demonstração direta, verificou-se que, da negação do Postulado das Paralelas, poder-se-ia obter uma geometria igualmente consistente, tal como a euclidiana. Portanto, os critérios até então adotados para caracterizar os princípios de uma teoria eram insuficientes ou estavam equivocados.

Outro evento que teria enorme repercussão na geometria foram as descobertas, também no início do século XIX, das *demonstrações de impossibilidade* para os três problemas clássicos da matemática, a saber, a quadratura do círculo, a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo[162]. Convém ressaltar que tais resultados dizem respeito aos princípios de Euclides. Ou seja, não é possível, por exemplo, construir um quadrado com a mesma área que um círculo a partir dos postulados euclidianos. Ainda que os gregos estivessem a par da necessidade de se investigar condições de resolução (*diorismos*) de problemas, como salientamos no Capítulo 2, não se poderia conhecer, dentro da própria geometria euclidiana, uma demonstração relativa aos princípios matemáticos desta mesma teoria.

Isso posto, a abordagem aos fundamentos do conhecimento matemático, segundo Hilbert, deveria estar amparada *somente nas relações lógicas* que podem ser estabelecidas entre axiomas *arbitrariamente* escolhidos e as proposições que se seguem daí. Além disso, deve-se também investigar, e demonstrar, as propriedades desses axiomas.

Tamanha importância conferida às relações lógicas renderam a Hilbert a alcunha de "formalista", expressão que pode ser confundida com certa visão da matemática como mera manipulação de fórmulas vazias, quiçá um tipo de jogo intelectual[163]. Não é exatamente

---

161 Ptolomeu, autor do *Almagesto*, foi o matemático mais antigo, que se tenha notícias, a tentar demonstrar o Postulado das Paralelas. Sua demonstração foi preservada por Proclus.

162 Hilbert apresentou em 1893 uma versão simplificada da prova de Lindemann de 1882. Para a importância dos teoremas de impossibilidade dos três problemas clássicos, ver Davide Crippa, *Impossibility results: from geometry to analysis : A study in early modern conceptions of impossibility*. Tese (Doutorado). Univeristé Paris Diderot Paris 7, 2014; do mesmo autor, *The impossibility of squaring the circle in the 17th century: a debate among Gregory, Huygens and Leibniz*, Springer, 2019.

163 Michael Detlefsen discrimina três tipos de formalismo nas matemáticas. O formalismo de termos (ou empírico-semântico), o formalismo como jogo, e o formalismo instrumentalista (hilbertiano). O formalismo como jogo, na Alemanha, esteve associado a dois colegas de Frege na Universidade de Jena: C. F. A. Gutzmer e J. Thomae. A respeito da pecha de formalista atribuída à matemática de Hilbert, ver Lassalle Casanave, *Por construção de conceitos*, Rio de Janeiro, 2019, cap. 4; Michael Detlefsen, Formalism and Hilbert's understanding of consistency problems, *Archive for Mathematical Logic*, v. 60, n. 5, p. 529-546, 2021.

isso que Hilbert faz nos *Fundamentos da geometria*, como ele próprio tentou esclarecer a Frege numa carta daquele mesmo ano de 1899. "Cada teoria", diz Hilbert,

> é apenas um andaime (esquema) de conceitos junto a relações necessárias entre si, e os elementos básicos podem ser pensados de qualquer maneira alguém deseje. Se ao falar em meus pontos eu penso em algum sistema de coisas, e.g., o sistema: amor, lei, limpador de chaminé… e então assumo todos os meus axiomas como relações entre essas coisas, então minhas proposições, e.g., o teorema de Pitágoras, também são válidas para essas coisas. Em outras palavras, qualquer teoria sempre pode ser aplicada a uma quantidade infinita de sistema de elementos básicos[164].

O método axiomático é aplicado nos *Fundamentos da geometria*[165] da seguinte maneira. Primeiro, postula-se a existência de três conjuntos quaisquer de "coisas": pontos, retas, planos. A esses conjuntos são associados três conjuntos de símbolos, a saber, pontos: {A, B, C, . . . }; retas: {r, s, t, . . . }; e Planos: {α, β, γ, . . . }. Em seguida, é enunciado o sistema axiomático dividido em cinco grupos:

I. Axiomas de incidência;
II. Axiomas de ordem;
III. Axiomas de congruência;
IV. Axioma das paralelas;
V. Axiomas de continuidade.

Os axiomas hilbertianos *definem* (implicitamente) certas relações entre conceitos cujo conteúdo semântico, na teoria formalizada, é completamente irrelevante. Não há, a princípio, pressuposição existencial nem se estabelece regra de construção. Dentre outras diferenças em relação a Euclides, o sistema de Hilbert não contempla nenhum dos postulados de construção e, por isso, suprime a linguagem normativa. O Postulado 4 de Euclides é demonstrado no sistema de Hilbert, restando da geometria euclidiana apenas o Postulado das Paralelas (Grupo IV).

Argumentou-se no capítulo anterior que embora seja possível interpretar os postulados construtivos de Euclides como proposições existenciais — o que de resto tem sido feito pela maioria dos seus comentadores —, deve-se entender que o modo de existir desses objetos é legitimado *matematicamente* pelas construções. Isso não implica em dizer que os

---

[164] Carta de 29 de dezembro de 1899. Ver Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Basil Blackwell, 1980, p. 42.

[165] Hilbert fora incentivado por Felix Klein a publicar o conteúdo de suas aulas sobre geometria euclidiana relativamente ao segundo semestre de 1898. *Fundamentos da geometria* foi publicado no âmbito das cerimônias em homenagem a Gauss e Wilhelm Weber. O livro foi um verdadeiro *best-seller,* coisa rara para um matemático. Foi resenhado por Poincaré e logo recebeu propostas de tradução para outras línguas. Ver Constance Reid, *Hilbert*, 1996, cap. VIII.

Elementos não pressupõe um domínio de objetos sobre os quais são feitas descrições[166]. Nesse sentido, não haveria nenhuma razão relevante, exceto gramatical, para negar que os Axiomas I.1-2 de Hilbert são compatíveis com o Postulado 1 de Euclides. Como logo veremos, o critério hilbertiano de legitimação matemática da existência é a demonstração de consistência do sistema. A primeira consequência desta tese, como verificamos em Hilbert, é a supressão do Postulado 2. Afinal, se se entende que a prolongação é infinita, o axioma I.1 assegura a sua existência e o I.2 a sua determinação unívoca entre dois pontos.

Nos *Fundamentos da geometria* as inferências diagramáticas são completamente dispensadas. O papel dos diagramas ali é apenas psicotécnico. Sob esse ponto de vista, pode-se pensar que os axiomas do Grupo II também servem ao propósito de verbalizar certas relações que anteriormente Euclides extraía diretamente dos diagramas (co-exatas). Eis a lista:

> II.1. *Se A, B, e C são pontos de uma linha reta e B está entre A e C, então B também está entre C e A.*
>
> II.2. *Se A e C são dois pontos de uma linha reta, então existe ao menos um ponto B que está entre A e C e ao menos um ponto D situado de tal maneira que C está entre A e D.*
>
> II.3. *Para quaisquer três pontos numa linha reta, existe sempre um ponto, e somente um, que está entre os outros dois.*
>
> II.4. *Quaisquer quatro pontos A, B, C, D de uma linha reta podem sempre ser arranjados de tal modo que B estará entre A e C e também entre A e D; ademais, que C estará entre A e D e também entre B e D.*
>
> II.5. *Seja A, B, C três pontos que não estão na mesma linha reta. Seja a uma reta que sobre o plano ABC e que não passa através dos pontos A, B, C. Se a linha reta a passa através de um ponto do segmento AB, então ou irá passar através do segmento BC, ou irá passar através do segmento AC.*

Por meio desses axiomas pode-se definir intersecção retilínea. Não há, porém, um axioma que permita interseção linear entre retas e circunferências, posto que não há um axioma correspondente ao Postulado 3. No caso do axioma II.5, poder-se-ia pensar numa versão mais fraca que tratasse de interseções entre círculos e retas. É o que fazem Avigad, Dean & Mumma em "A formal system for Euclid's *Elements*", por exemplo. O sistema formal deles

[166] Esse é o argumento de Ian Mueller, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, MIT Press, 1981, pp. 15-17. Ver também Lassalle Casanave, *Por construção de conceitos*, Rio de Janeiro, 2019, p. 98.

traz nove axiomas de intersecção, dos quais quatro deles tratam de interseções entre retas e círculos. O axioma 5, em especial, oferece uma formalização mais próxima da maneira como Euclides procede:

Para quaisquer dois pontos distintos, A e B, onde A e B estão sobre uma reta e B dentro de um círculo, então existe um ponto C tal que seja a interseção entre o círculo e a referida reta prolongada de A até B.

A reconstrução da geometria euclidiana pressuposta pelo método axiomático-formal prescinde do método inferencial euclidiano, baseado em demonstrações heterogêneas, bem como do seu modo de apresentação. Nunca esteve na agenda investigativa de Hilbert resgatar um modo de fazer matemática similar ao euclidiano[167]. Aliás, a própria concepção de "geometria euclidiana" que ele poderia ter à época já era muito diferente do que estava nos *Elementos*.

A principal diferença entre Hilbert e Euclides não está apenas na supressão de postulados de construção e no modo de apresentação de suas respectivas demonstrações, senão no fato daquele considerar condição *sine qua non* para a existência de conceitos matemáticos, bem como para a verdade dos axiomas, a demonstração da consistência do sistema axiomático-formal, i.e., que *é impossível deduzir uma contradição a partir dos axiomas do sistema*. Hilbert estabelece essa condição pela primeira vez também em carta a Frege de dezembro de 1899, uns meses depois de ter publicado os *Fundamentos*. "Se os axiomas estabelecidos arbitrariamente não se contradizem com todas as suas consequências", diz Hilbert, "então eles são verdadeiros e as coisas definidas pelos axiomas existem. Esse é para mim *o critério da verdade e da existência"*[168].

Note-se que, por esse critério é possível uma teoria matemática ser consistente, i.e., não ter contradições, e não obstante ter conceitos não instanciáveis. Essa é a conclusão anti-realista do método axiomático-formal à qual Hilbert se agarrará ao longo de sua carreira. Diz ele, em 1927:

> O valor das demonstrações de existência pura consiste precisamente em que a construção individual é eliminada por elas e que muitas construções diferentes são subsumidas sob uma ideia fundamental, de modo que apenas o que é essencial para a prova se destaca claramente; brevidade e economia de pensamento são a *raison d'être* das demonstrações de existência. Os

---

[167] Como veremos nos próximos capítulos, até mesmo uma edição dos *Elementos* que reivindique *fidelidade filológica* pode conter desvios em relação ao método demonstrativo euclidiano. Por exemplo, a edição de Heiberg, assim como algumas outras na Modernidade, usa símbolos algébricos para expor as demonstrações euclidianas.

[168] Carta de 29 de dezembro de 1899. Ver Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Basil Blackwell, 1980, pp. 39-40.

> teoremas de existência pura foram os marcos mais importantes no desenvolvimento histórico de nossa ciência[169].

Esse é também o entendimento por trás da aplicação das geometrias não-euclidianas à física contemporânea. Porque se se sabe que são consistentes, então o critério para determinar qual geometria é mais apropriada é puramente empírico-instrumental.

Do que foi discutido, deve-se concluir que não estava ausente do horizonte do método axiomático-formal uma metodologia relativamente à resolução de problemas[170]. Isso porque, para Hilbert, qualquer problema formulado numa teoria consistente ou é solucionável ou é demonstrada a impossibilidade de sua resolução. Nisso consiste a metamatemática (ou teoria da prova).

> Com esta nova fundamentação da matemática, que pode ser apropriadamente chamada de teoria da prova, acredito ter fornecido a disposição final dos problemas dos fundamentos da matemática, transformando cada proposição matemática em uma fórmula concretamente exibível e rigorosamente derivável, transferindo assim a todo complexo de questões no domínio da matemática pura[171].

Sendo assim, a demonstração da consistência também é a *justificação (lógico-matemática) de algum procedimento*:

> [S]e justificar um procedimento significa algo mais do que demonstrar sua consistência, só pode significar determinar se o procedimento é bem-sucedido em cumprir seu propósito. O sucesso é necessário; é o mais alto tribunal, ao qual todos se submetem[172].

Como se vê, a axiomatização de uma teoria, sob esse ponto de vista hilbertiano, deve satisfazer apenas critérios lógicos. Recorde-se que para Proclus os axiomas deveriam satisfazer um critério de autoevidência, razão pela qual o Postulado das Paralelas fora rejeitado por ele. Nesse sentido, o método axiomático-formal esvazia a matemática das questões epistemológicas que sempre a acompanharam. Trata-se, antes, nas palavras de Hilbert, do produto do pensamento puro do qual não se pode dizer se são verdadeiras ou falsas[173]. O objetivo do formalismo é, além de derivar fórmulas, alcançar um conhecimento

---

[169] Hilbert, The Foundations of Mathematics, In Jean van Heijenoort, *From Frege to Godel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 2002, p. 475.
[170] Ver Ian Mueller, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, MIT Press, 1981, p. 7.
[171] Hilbert, *Probleme der Grundlegung der Mathematik*. Atti del Congresso internazionale dei matematici (Bologna, 1929), vol. 1, 135–141 *apud* Detlefsen, M., "Formalism and Hilbert's understanding of consistency problems". *Archive for Mathematical Logic* 60.5, 2021, p. 544.
[172] Hilbert, On the infinite. In: Jean van Heijenoort, *From Frege to Godel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 2002, p. 371. Esse texto foi publicado originalmente em 1927.
[173] Hilbert 1921/1922 apud Hallett, "Reflections on the Purity of Method in Hilbert's Grundlagen der Geometrie, In Paolo Mancosu (Ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice,* Nova York, 2008, p. 212. Ver também

que se poderia chamar formal. A legitimação matemática da existência de objeto geométrico deixa de ser a sua exibição. A consequência dessa tese é a dispensabilidade dos diagramas.

3.4. Dispensabilidade de diagramas

Da perspectiva que perpassa da matemática grega, o estabelecimento da consistência como critério de existência poderia ser tomado como um tipo de heresia irreparável[174]. Isso porque, se por um lado a exatidão matemática não poderia ser instanciada no mundo contingente da experiência — e por isso não poderia ser fundamentada por nada empírico —, ela não obstante permitia uma descrição precisa dos fenômenos astronômicos, além de fundamentar os teoremas da mecânica. A geometria euclidiana, portanto, era a *única possível*. Quando se passa a considerar apenas a consistência, o problema acerca da verdadeira geometria torna-se irrelevante[175].

Uma segunda consequência do método axiomático-formal diz respeito à natureza da argumentação matemática. Mais precisamente, Hilbert declara que, se a consistência é critério de verdade dos axiomas e da existência dos conceitos definidos pelos axiomas e derivados a partir daí, então argumentos informais, tais como, por exemplo, as demonstrações de Euclides, não devem ser consideradas demonstrações genuínas[176].

O estudo dos sistemas formais e suas propriedades tornou-se objeto da metamatemática (ou teoria da prova). Neste sentido, uma teoria objeto não é mais do que a sintaxe do sistema formal regida por regras de formação e regras de inferência sem haver qualquer referência ao conteúdo destes símbolos. Ou seja, a realização de demonstrações atentando-se unicamente para o processo mecânico de manipulação de símbolos. Segue-se daí a estandardização do conhecimento matemático, segundo a qual a demonstração é identificada à derivação de fórmulas. "Essa identificação", observa Lassalle Casanave, "pressuposta em vasta medida pela filosofia da matemática do século XX, é própria de uma maneira de entender a clarificação conceitual filosófica cuja importância não pode ser minimizada, a

---

Bernays, "Hilbert's significance for the philosophy of mathematics", 1922. In Paolo Mancosu, *From Brouwer to Hilbert. the debate on the foundations of mathematics in the 1920s*, Oxford University Press.

[174] *Das ist nicht Mathematik, Das ist Theologie*: "Isso não é matemática, é teologia", teria reagido um matemático ao ver as demonstrações mais abstratas de Hilbert. Ver Klein, *Lectures on the development of mathematics in the 19th century*, p. 311.

[175] Ver Hilbert, On the infinite, In Jean van Heijenoort, *From Frege to Godel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 2002, p. 372.

[176] Hilbert, "Axiomatic thought", In William Bragg Ewald, *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics*, Oxford University Press, Vol. 2, 2007, §8.

saber, que a clarificação consiste na análise lógica do conceito de que se trate"[177]. Essa pressuposição existia no *Formulario Mathematico* de Peano, na *Conceitografia* (*Begriffsschrift*) de Frege e no *Principia mathematica* de Russell e Whitehead.

De fato, foi essa a interpretação de Poincaré da axiomatização de Hilbert[178]. Segundo ele, o método axiomático-formal exigia apenas a aplicação "servil" das regras de inferências aos axiomas sem que houvesse entendimento acerca do que tratava a teoria em questão. Seria possível, então, delegar essa função a uma máquina lógica, por exemplo. Mas o sistema axiomático de Hilbert em 1899 não exigia que suas demonstrações fossem apresentadas segundo a sintaxe de alguma linguagem científica previamente construída. Ou seja, embora as demonstrações hilbertianas sejam formais e homogêneas, elas não são uma sequência de fórmulas, tais que cada qual é um axioma ou se segue da aplicação prévia de uma regra de inferência[179].

> A ideia fundamental da minha teoria da prova nada mais é do que descrever a atividade de nosso entendimento, fazer um *protocolo das regras* segundo as quais nosso pensamento realmente procede. Pensar é paralelo à fala e à escrita: formamos enunciados e os colocamos um atrás do outro[180].

Mesmo nos anos subsequentes — já na época dessa afirmação o estudo da lógica tornara-se central como meio de alcançar a demonstração da consistência da aritmética — , Hilbert mantém as linhas gerais sobre a aplicação do método axiomático-formal para a compreensão do raciocínio em geral, e o matemático em particular.

Apesar de não ser perceptível em Hilbert a presença dalguma concepção de clarificação conceitual que nos permita colocá-lo no mesmo rol de filósofos contemporâneos aduzido por Lassalle Casanave, seu formalismo pressupõe uma versão da análise lógica do conhecimento matemático[181]. O mérito desse formalismo, segundo alguns de seus contemporâneos, estaria na possibilidade de mostrar a "estrutura lógica da matemática", o que não estaria ao alcance das teorias informais[182]. Pode-se conceder que as demonstrações formais de Hilbert não substituem o raciocínio matemático em geral. Os propósitos do método axiomático-formal estão circunscritos ao estudo lógico-matemático da independência e

---

[177] Lassalle Casanave, *Por construção de conceitos*, Rio de Janeiro, 2019, p. 113.
[178] Poincaré, Review of Hilbert's *Foundations of geometry. Bulletin of American Mathematical Society*, 10(1), p. 1-23, 1903.
[179] Ver Lassalle Casanave, *Por construção de conceitos*, Rio de Janeiro, 2019, p.99, 111-12.
[180] Hilbert, "The foundations of mathematics", In Jean van Heijenoort, *From Frege to Godel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 2002, p. 475.
[181] Ver também Hermann Weyl, "David Hilbert and his mathematical work", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 50, 1944, p. 612–654.
[182] Para uma visão crítica a esse respeito, ver Weyl, H.: *Philosophy of Mathematics and Natural Science* Princeton University Press, 1949. Essa obra foi publicada originalmente em 1927.

consistência dos axiomas da teoria. Por outro lado, a afirmação de Ian Mueller de que essas demonstrações "representam" o raciocínio matemático ordinário não se mostra compatível com as conclusões do próprio Hilbert, especialmente no que diz respeito ao uso dos diagramas, uma prática matemática há muito consolidada[183].

Estamos de volta a 1900 na Conferência em Sorbonne. A descrição feita por Hilbert do progresso do conhecimento matemático, ao qual já nos referimos, explica a maneira como deveriam estar relacionados a axiomatização e os diagramas. Consideremos essa tese kantiana aduzida por Hilbert: a intuição espacial torna o conhecimento geométrico possível. Logo, acrescenta este, os signos dos conceitos matemáticos formados serão escolhidos de tal maneira a fazer referência aos atributos daquela intuição. Diz Hilbert:

> A novos conceitos correspondem necessariamente novos signos. Estes nós escolhemos de tal forma que nos lembram dos fenômenos que foram a ocasião para a formação de novos conceitos. Dessa maneira, as figuras geométricas são signos para as imagens mnemônicas da intuição espacial e são usadas como tal por todos os matemáticos[184].

Convém notar que na introdução aos *Fundamentos da geometria*, Hilbert diz que a escolha dos princípios fundamentais da matemática, i.e., os axiomas, é *um problema relativo à análise lógica da intuição espacial*.

Agora, não há por que o conhecimento matemático estar limitado pelo uso das intuições, mesmo que de maneira regrada, como em Euclides. Ainda que os diagramas funcionem como "fórmulas gráficas", uma comparação feita por Hilbert com os símbolos aritméticos, a função do método axiomático-formal é "libertar" as matemáticas dessa categoria, quais sejam, a de magnitude em geral e a de número[185]. Mais uma vez Hilbert:

> O uso de sinais geométricos como um meio de demonstração estrita pressupõe o conhecimento exato e o domínio completo dos axiomas que fundamentam essas figuras; e para que essas figuras geométricas possam ser incorporadas ao tesouro geral dos signos matemáticos, é necessária uma rigorosa investigação axiomática de seu conteúdo conceitual[186].

Os axiomas do Grupo II exemplificam a progressão dessas reflexões que culminariam nos argumentos de dispensabilidade de diagramas. Euclides sempre introduz relações de ordem a partir do diagrama, exceção feita apenas quando os segmentos resultantes precisam ser iguais. Os axiomas de ordem verbalizam essas relações co-exatas, para usar a

---

[183] Ian Mueller, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, MIT Press, 1981, p. 9.
[184] Hilbert, "Mathematical problems". *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8, 1902, p. 442.
[185] Eduardo Giovannini, Abel Lassalle Casanave & Paulo Veloso, De La Práctica Euclidiana a La Práctica Hilbertiana: Las Teorías Del Área Plana. *Revista Portuguesa de Filosofia*, vol. 73, no. 3/4, 2017, p. 1263–94.
[186] Hilbert, "Mathematical problems". *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8, 1902, p. 443.

expressão de Manders. É curioso notar como o matemático Felix Klein, ao descrever o sistema de seu colega Hilbert, considerou necessário fazer uma apologia desses axiomas; como se, aos olhos da comunidade da época, a verbalização dessas relações tornasse a demonstração injustificadamente longa e burocrática. Diz Klein:

> O significado desses axiomas de estar-entre [Grupo II] não deve ser subestimado. Eles *são tão importantes quanto qualquer outro axioma*, se nós desejamos desenvolver a geometria como uma ciência lógica, a qual, *após* os axiomas serem selecionados, não mais precisa recorrer à intuição e às figuras para a dedução de suas conclusões. Entretanto, este recurso é estimulante e permanecerá sempre como uma adição necessária à pesquisa. Euclides, que não tinha esses axiomas, sempre teve que considerar diferentes casos com adição de figuras. [Mas] como ele dá pouca importância a um desenho geométrico correto, existe um perigo real que um pupilo seu possa, por causa de uma figura falsamente desenhada, incorrer em uma falsa conclusão. É desta maneira que numerosos sofismas geométricos aparecem[187].

3.5. A filosofia da matemática após o método axiomático-formal de Hilbert

Visto que para Hilbert a consistência é o critério de verdade dos axiomas e da existência dos conceitos definidos pelos axiomas, as demonstrações de Euclides não seriam consideradas genuínas, uma vez que carecem desse tratamento metamatemático. Além disso, o recurso aos diagramas denunciariam uma alegada falta de rigor, reflexo de uma matemática ainda dependente da intuição espacial. O fato de se poder deduzir dentro de uma teoria formal os teoremas contemplados nos *Elementos* mostraria, finalmente, que são prescindíveis o método demonstrativo bem como o estilo euclidianos.

---

[187] Felix Klein, *Elementary Mathematics from a Advanced standpoint: Geometry*, Berlim, 2016, p. 201. (Tradução de Gert Schubring baseada na versão alemã de 1933.) Klein menciona dois outros matemáticos que contemplaram o problema: August Ferdinand Möbius, em 1827, e Gustav Gauss, numa carta a Bolyai em 1832. Vide Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Vol. 2, Oxford, 1972. p. 1006. As condições especiais para o surgimento de uma concepção lógico-formal de demonstração matemática já haviam sido dados no século XIX. Nesse particular, deve-se considerar, ainda que brevemente, a antecipação dos argumentos de dispensabilidade de diagramas no tocante às relações de ordem em Moritz Pasch, e Bernard Bolzano. Hilbert diz textualmente que os axiomas do Grupo II foram formulados por Pasch, o qual vinha criticando o método demonstrativo de Euclides desde 1882. Já no início do século XIX Bolzano chamava a atenção para a necessidade de análise lógica de conceitos geométricos que eram até então considerados “óbvios”, “intuitivos”, e, por isso, extraídos dos diagramas, como seria o caso das interseções e da ordem dos pontos sobre a reta (estar-entre). De fato, Bolzano consegue deduzir, a partir de um conjunto diferente de primeiros princípios, uma proposição equivalente ao axioma II.3 como um teorema. Infelizmente, o autor não deu um estudo sistemático ao tema. Os primeiros axiomas de interseção e ordem começam a surgir no século XVI no contexto da recepção moderna do texto euclidiano. Contudo, não se percebe aí que a dispensabilidade dos diagramas fosse o objetivo almejado.

No âmbito das investigações metamatemáticas dos anos 1920, Hilbert discrimina *proposições ideias* e *proposições de conteúdo*. As proposições ideias são as fórmulas do sistema axiomático-formal determinadas pelas regras de formação e de transformação (ou de inferência). Hilbert as chama também de *objetos ideias da teoria*. As proposições de conteúdo, por outro lado, são frases declarativas com valor de verdade cujo conteúdo semântico é comunicado em algum vernacular ordinário[188]. À luz dessa dicotomia, e do que foi discutido na seção anterior, pode-se vislumbrar também uma distinção entre demonstrações reais e demonstrações ideais. Demonstrações reais são informais e podem admitir representações heterogêneas. Demonstrações ideias, por sua vez, são formais, *e devem ser* representáveis numa linguagem científica prévia, e são homogêneas. Demonstrações ideias são, por definição, completas, ao passo que demonstrações reais admitem lacunas no processo inferencial.

O método axiomático-formal de David Hilbert exerceu uma enorme influência sobre a historiografia e epistemologia da matemática ao longo do século XX, ajudando a precipitar a filosofia na direção da concepção contemporânea de análise lógica, visão esta ainda dominante nos comentários a Euclides. No artigo "Axiomatic thought"[189], Hilbert expõe características do método axiomático. Trata-se, no entanto, de um artigo programático, embora trate de questões pertinentes ao cenário matemático que haviam alcançado um destaque significativo nos anos que se seguiram à publicação dos artigos "On the concept of number" (1900) e "On the foundations of logic and arithmetics" (1904).

Ao se observar os fatos de um campo de conhecimento, diz Hilbert, percebe-se que eles podem ser ordenados com a ajuda de um *quadro conceitual*. Esse quadro também pode ser entendido como *a teoria do campo de conhecimento*. Essa ordenação ocorre do seguinte modo. Cada conceito de um quadro conceitual corresponde a um objeto em um campo de conhecimento determinado e as relações lógicas entre os conceitos corresponde aos fatos desse campo de conhecimento[190]. Dentro de uma determinada teoria, convém observar que há um determinado grupo de proposições fundamentais que, somente elas, são suficientes para a construção de um quadro conceitual inteiro de acordo com princípios lógicos. Tais

---

188 Hilbert, "On the infinite", In Jean van Heijenoort, *From Frege to Godel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 2002, p. 381. Ver também Hilbert, "The foundations of mathematics". In Jean van Heijenoort, *From Frege to Godel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 2002.

189 Comunicação apresentada na Sociedade Matemática da Suíça, em 11 de setembro de 1917, Zurique. Ver Hilbert, "Axiomatic thought", In William Bragg Ewald, *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics*, Oxford University Press, Vol. 2, 2007, p. 1105-1114.

190 Hilbert, "Axiomatic thought", In William Bragg Ewald, *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics*, Oxford University Press, Vol. 2, 2007, §2-3.

proposições são chamadas *axiomas (ou proposições axiomáticas) de um campo de conhecimento individual*[191]. O método axiomático pretende fornecer esses axiomas, bem como demonstrar a *dependência* e *independência* das proposições de um campo de conhecimento e a *consistência* de todas essas proposições

Ao falar da dependência ou independência dos axiomas, Hilbert aponta que embora os axiomas de um sistema sejam independentes entre si, como nos *Elementos* de Euclides, isso não implica que não o seja em relação a outros axiomas de outros campos de conhecimento e por isso a eles reduzidos. Seria necessário *demonstrar matematicamente* a consistência, i.e., que dos axiomas do sistema não se poderia deduzir uma contradição formal[192]. Daí a necessidade de uma teoria da prova. São objetivos da teoria da prova, em primeiro lugar, desenvolver um sistema axiomático apropriado que possibilite uma formalização de provas matemáticas, mostrando quais resultados matemáticos se seguem destes axiomas; em segundo lugar, demonstrar a consistência desse sistema axiomático. A descoberta da inconsistência, porém, não significa que a teoria deve ser descartada. Em tais circunstâncias, diz Hilbert, deve-se modificar os axiomas da teoria de modo que os fatos descritos por ela sejam consequências lógicas dos novos axiomas escolhidos[193]. Em ambos os casos, diz ele, não haveria outro campo senão a lógica na qual poderiam ser reduzidos. Se esse fosse efetivamente o próximo passo, deveríamos axiomatizar a própria lógica e demonstrar que as teorias supramencionadas são apenas parte da lógica.

Em resumo, o método axiomático-formal, ao estabelecer os princípios fundamentais da teoria, retira todo o conteúdo relativo à representação material a partir da qual os conceitos são formados. Essa representação material, como esclarecemos, é, na geometria, o diagrama.

> Enquanto no método construtivo os objetos da teoria são introduzidos como um *gênero de coisas*, na teoria axiomática trata-se de um *sistema definido de coisas* (respectivamente muitos desses sistemas) que, a partir de então, forma um domínio delimitado de objetos para todos os predicados de que são compostos os enunciados da teoria[194].

Entretanto, se por um lado Hilbert almejava alcançar com seu método axiomático-formal um novo padrão de rigor científico relativamente às demonstrações

---

[191] Hilbert, "Axiomatic thought", In William Bragg Ewald, *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics*, Oxford University Press, Vol. 2, 2007, §5.
[192] Hilbert, "Axiomatic thought", In William Bragg Ewald, *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics*, Oxford University Press, Vol. 2, 2007, §24.
[193] Hilbert, "Axiomatic thought", In William Bragg Ewald, *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics*, Oxford University Press, Vol. 2, 2007, §30.
[194] Hilbert & Bernays, *Grundlagen der Geometrie* I, 1934.

matemáticas, esse mesmo feito acabou alçando os *Fundamentos da geometria* a uma espécie de paradigma a partir do qual as práticas matemáticas seriam comparadas e avaliadas. Percebe-se essa linha de raciocínio nas objeções ao uso de diagramas feitas por Rudolf Carnap[195], Alfred Jules Ayer[196], Hans Reichenbach[197], Carl Gustav Hempel[198] e Karl Popper[199].

Para esses autores, a prática matemática ordinária pertence ao âmbito da heurística, que, por sua vez, pertence ao contexto da descoberta. Ora, sendo o contexto da descoberta equiparado com a dimensão subjetiva da atividade científica, resulta daí que a maneira como ordinariamente os teoremas são demonstrados não seria relevante para a filosofia. Em oposição, cunhou-se o termo contexto da justificação para designar o objeto da epistemologia, em cujo núcleo estariam sequências de proposições verdadeiras objetivamente verificáveis e dedutivamente demonstráveis. De acordo com essa perspectiva, somente demonstrações homogêneas pertenceriam ao contexto da justificação.

A separação de um contexto da descoberta de um contexto da justificação pretende estabelecer os limites conceituais da epistemologia perante a psicologia empírica. A primeira tomaria a demonstração matemática como uma convenção social, na qual os matemáticos convencem uns aos outros (ou uma determinada audiência) da verdade de um determinado teorema; nesse modelo, uma demonstração é expressa em linguagem natural com adição de figuras e símbolos. Esta seria a caracterização da prática matemática. Por outro lado, temos uma concepção de prova mais restrita como uma sequência de fórmulas que obedece um conjunto de regras previamente apresentadas e cuja conclusão, i.e., o teorema, também seria uma fórmula. Esta seria a concepção formal.

Como se sabe, os cientistas não têm o hábito de explicitar a forma lógica de seus argumentos, tampouco tentam enquadrar seus raciocínios segundo alguma das figuras da silogística ou por *modus ponens*. Eis porque os proponentes do contexto da justificação costumam pensar que o objetivo de uma epistemologia é proporcionar uma *reconstrução lógica* da argumentação científica. Note-se o que diz Reichenbach:

> Podemos acrescentar a observação de que a distinção entre o contexto da justificação e o contexto da descoberta não se restringe apenas ao pensamento indutivo. A mesma distinção se aplica às operações dedutivas do pensamento. Se enfrentarmos um problema matemático, digamos, a

[195] Carnap, *An Introduction to the Philosophy of Science.* Nova York: Basic Books, Inc., 1966, p. 126.
[196] Ayer, *Language, Truth and Logic*. 2 ed. London: Gollancz, [1936] 1946, p. 82-83.
[197] Reichenbach, *Experience and Prediction: An Analysis of the Foundations and the Structure of Knowledge*. Chicago: The University of Chicago Press., 1938.
[198] Hempel, Geometry and Empirical Science. *American Mathematical Monthly*, 52, 1945. Do mesmo autor, *Philosophy of Natural Science*. Londres: Prentice-Hall, Inc., 1966.
[199] Popper, *A lógica da pesquisa científica*. Tradução: Leonidas Hegenberg & Octanny Silveira da Mota. São Paulo: editora Cultrix, [1934] 1972.

> construção de um triângulo a partir de três parâmetros, a solução (ou a classe de soluções) é inteiramente determinada pelo problema. Se alguma solução nos for apresentada, poderemos decidir sem ambiguidade e apenas com o uso de operações dedutivas se está correta ou não. A maneira pela qual encontramos a solução, no entanto, permanece em grande parte na escuridão inexplorada do pensamento produtivo e pode ser influenciada por considerações estéticas ou por um "sentimento de harmonia geométrica"[200] .

A premissa principal dessa passagem reside no entendimento de que o estudo do conhecimento matemático consiste exclusivamente na análise do conteúdo inferencial das demonstrações. Com isso, Reichenbach reforçou o entendimento de que o método inferencial de Hilbert poderia ser ampliado num tipo de método filosófico de análise do conhecimento. Como já esclarecido, o sistema axiomático de Hilbert não é um estudo *da* teoria matemática apresentada nos *Elementos*. Uma vez que a abordagem lógico-matemática pode prescindir de considerações filosóficas acerca do método inferencial bem como do modo apresentação, não se poderia tomar a axiomatização hilbertiana como critério definitivo contra as demonstrações heterogênea de Euclides.

Não deixa de ser curioso que essa projeção normativa dos filósofos tenha influenciado também a produção historiográfica sobre a matemática grega. Não é uma coincidência que autores como Heath, Kline, Kleene, e Beppo-Levi comunguem a ideia de que os princípios de Euclides são insuficientes; e mesmo Netz não parece disposto a admitir uma visão radicalmente distinta da hilbertiana. Para eles, tal e qual Hilbert, cada afirmação geométrica deveria ser chancelada por um axioma previamente verbalizado. Essa mudança de paradigma, importa dizer, não incide apenas sobre o uso de diagramas em provas geométricas, mas também também sobre a própria admissão das provas de Euclides como legítimas[201].

---

[200] Reichenbach, *Experience and Prediction: An Analysis of the Foundations and the Structure of Knowledge*. Chicago, 1938, p. 383-384.

[201] José Jairo da Silva critica Euclides por este proceder através de métodos de construção e não "métodos lógicos de demonstração". Ora, o método construtivo é característico da matemática grega em geral, não só de Euclides. E era um método considerado genuinamente matemático, ao contrário dos métodos mecânicos e instrumentais. Sob uma perspectiva historiográfica da prática matemática antiga, essa observação não desabona a geometria euclidiana. Por outro lado, a que "métodos lógicos" Da Silva se refere? Decerto não poderia ser a silogística, posto que matemático algum jamais precisou pedir licença a Aristóteles para verificar a correção de seus raciocínios. Talvez se possa considerar "métodos lógicos" como sinônimo de inferência válida, o que também não é satisfatório, pois não leva em consideração o uso regrado dos diagramas. Veja-se J. J. Da Silva, *Filosofias da matemática*, Fapesp, 2007, p. 183.

3.6. A lógica subjacente da prática matemática euclidiana

Em uma famosa passagem, Aristóteles diz que a lógica era, ou *deveria ser*, o instrumento da filosofia[202]. Com o passar do tempo essa noção, por assim dizer, instrumentalista, da lógica foi se tornando uma doutrina dominante no tratamento do conhecimento científico, graças, em grande parte, ao próprio Aristóteles. Ressalte-se, porém, que mesmo essa noção instrumentalista da lógica, quando aplicada ao estudo da ciência, vai além da explicitação da forma dos argumentos, da relação entre a verdade das premissas e a verdade da conclusão[203]. Viu-se de que maneira a doutrina aristotélica se afasta do método axiomático-formal hilbertiano. Aproveitemos a oportunidade para considerar o artigo de Avigad, Dean & Mumma, o qual, partindo dessa visão instrumentalista da lógica, procura formalizar as demonstrações heterogêneas de Euclides.

O artigo de Avigad, Dean & Mumma não é uma objeção às demonstrações de Euclides ou uma réplica a Manders. Ao contrário, estes autores foram motivados por uma honesta defesa dos *Elementos* ao mesmo tempo em que reconhecem a importância que a distinção entre atributos exatos e co-exatos estabelece um novo marco interpretativo sobre esta obra. Ainda assim, e aqui reside a tese principal deles, afirmam ser possível reconstruir as justificativas diagramáticas sintaticamente num sistema formal. A natureza diagramática das demonstrações euclidianas, ainda segundo eles, não residiria na presença do artefato gráfico, mas antes na admissão de algumas inferências básicas que são feitas sem justificativas. O objetivo, portanto, é determinar quais inferências têm essa característica[204]. Em outras palavras, mostrar a "lógica subjacente" das inferências co-exatas possibilita a dispensabilidade dos diagramas.

Nada obsta que uma teoria baseada em argumentos heterogêneos seja inteira, ou parcialmente, formalizada. Por sinal, esta foi uma das reivindicações feitas por Barwise & Etchemendy quando propuseram a distinção entre argumentos homogêneos e heterogêneos. Eles argumentaram, nesta ocasião, que o não reconhecimento do papel demonstrativo de diagramas na matemática poderia ser a causa da dificuldade de encontrar bons programas autômatos (algoritmos) de demonstração[205]. Este novo tratamento dos argumentos heterogêneos na literatura especializada abriu precedentes para o desenvolvimento de

---

[202] Aristóteles, *Tópicos,* VIII.14, 163b9-11.
[203] Vide Ross, *Aristotle's Prior and Posterior Analytics*. Oxford University Press, [1949] 1957, p. 51.
[204] J. Avigad, E. Dean & J. Mumma, A Formal System for Euclid's *Elements*. *The Review for Symbolic Logic*, v. 2, 2009, p. 12-13
[205] Barwise & Etchemendy, Visual Information and Valid Reasoning, In G. AllWein & J. Barwise, *Logical Reasoning with Diagrams*, New York, 1996, p. 13.

sistemas formais e *softwares* heterogêneos de demonstração, a exemplo do *hyperproof* de Barwise & Etchemendy, um *software* para lógica de primeira ordem.

O Sistema Formal *E* de Avigad, Dean & Mumma (doravante apenas **SFE**) é um sistema formal heterogêneo designado especificamente para estudar as demonstrações parcialmente baseadas em diagramas de Euclides e que contempla regras para os atributos exatos e os co-exatos de Manders. Como de praxe, procede-se, primeiro, com a exposição da linguagem formal na qual as demonstrações serão reconstruídas. São definidas nesta linguagem as regras de formação e as regras de inferência. As regras de formação definem as fórmulas bem formadas do sistema, i.e., quais concatenações de símbolos são admissíveis. Funcionam, portanto, como uma gramática para um vernáculo ordinário. As regras de inferência fornecem autorizações formais para assegurar o processo dedutivo. Dentro deste quadro, uma demonstração é definida como uma sequência de fórmulas, onde cada uma delas, ou bem é um axioma ou segue-se da aplicação prévia de uma regra de inferência.

Como visto no Capítulo 2, Euclides tipicamente usa a aparência do diagrama para extrair relações topológicas. O segredo de Euclides, ainda de acordo com Manders, deve-se ao fato de sua prática matemática limitar as respostas da audiência sem precisar verbalizar estas relações textualmente. Avigad, Dean & Mumma argumentam, por outra parte, que uma vez que estas relações topológicas são limitadas e facilmente discerníveis, uma maneira de dispensar os diagramas seria explicitando todas elas como termos primitivos dentro do **SFE**. Em formalizações anteriores, como as de Tarski e Mueller, a quantificação abrange apenas pontos e retas, sem que haja regras sobre interseções fornecidas pelo diagrama. Como resultado, não há nessas formalizações fórmulas correspondentes aos Postulados 2 e 3. Não obstante, note-se como o Postulado 1 poderia ser formalizado:

$$\forall xy\ x \neq y \ \rightarrow \exists l\ \ \text{Sobre}(l, x) \wedge \text{Sobre}(l, y),$$

Ou seja, para todo par de pontos, x e y, se estes são distintos entre si, então existe uma linha l, tal que x está sobre l e y está sobre l.

Segundo a proposta de Avigad, Dean & Mumma, a teoria matemática dos *Elementos* compreenderia um conjunto de entes geométricos e aritméticos sobre os quais são feitas afirmações a respeito de seus atributos e relações que mantêm entre si. Algumas dessas relações são primitivas. O recurso à teoria de conjuntos nesta axiomatização reflete um procedimento habitual em lógica formal, a partir do qual se poderia analisar melhor a quantificação nas proposições euclidianas. Assim, a sintaxe do sistema de Avigad, Dean &

Mumma pode ser definida como o conjunto união dos dois respectivos subconjuntos. De um lado, o conjunto de símbolos pertencentes a toda teoria de primeira ordem, a saber:

1. um conjunto numerável de variáveis V, a abranger:
    1a. pontos { a, b, c, . . . };
    1b. retas {L, M, N. . . };
    1c. círculos {α, β, γ. . . }.
2. conectivos lógicos e quantificadores: {¬, ∧, ∨, →, ↔, ∀, ∃};
3. parênteses: (,).

No **SFE**, as relações básicas estabelecidas entre esses tipos corresponderiam aos atributos co-exatos de Manders, os quais são representados da seguinte maneira:

O ponto a cai sobre a reta L	Sobre(a, L)
Os pontos a e b caem sobre o mesmo lado da reta L	Sobre(a, b, L)
Os pontos a, b e c são distintos, colineares e b está entre a e c	Entre(b, a, c)
O ponto a cai sobre o círculo α	Sobre(a, α)
O ponto a cai dentro do círculo α	Dentro(a, α)
O ponto a é o centro do círculo α	Centro(a, α)
As retas L e M se intersecam	Interseção(L, M)
A reta L e o círculo α se intersectam	Interseção(L, α)
Os círculos α e β se intersectam	Interseção(α, β)

De outro lado, o subconjunto dos símbolos que variam de acordo com a teoria que pretende-se formalizar:

4. uma sequência de conjuntos < Ri >, com i $\in \mathbb{N}$, onde cada Ri é um conjunto de letras predicativas de aridade i;

5. uma sequência de conjuntos < Fi >, com i $\in \mathbb{N}$, onde cada Fi é um conjunto de letras de função de aridade i;
6. um conjunto C de constantes.

Para os atributos exatos, a estratégia de Avigad, Dean & Mumma é aplicar algumas funções sobre o conjunto dos pontos. Desse modo, para obter uma reta é preciso ter dois pontos, assim como para um triângulo é preciso haver três, o mesmo valendo para os ângulos. Com isto, as magnitudes são representadas da seguinte maneira.

Magnitude	Função	Símbolo
Segmentos	segmento(a, b, c)	ab
Ângulos	ângulo(a, b, c)	$\angle$abc
Áreas	área(a, b, c)	Δabc

Agora, o que está em disputa aqui não é se a análise lógica é relevante para compreender uma demonstração matemática. O problema, mais específico, é se a formalização dos *Elementos* seria suficiente para esclarecer os mecanismos epistemológicos vigentes numa demonstração heterogênea dentro de uma prática matemática. Há uma inegável conquista em trabalhar-se com demonstrações sintáticas. A primeira delas, em comparação até mesmo com o modelo hilbertiano, é um ganho em perspicuidade. Um sistema formal deveria ser capaz de explicitar alguns aspectos importantes da demonstração matemática que porventura são ocultados pela linguagem natural ou, como supôs-se até aqui, estavam codificados no diagrama. Esse é um tema fregeano, como já salientado. Há também uma vantagem teórica: dispomos dum melhor maquinário simbólico para tratar da quantificação e dos entes geométricos de Euclides. Além disso, agora seria possível incorporar os atributos co-exatos à sintaxe do Sistema E, de maneira que os diagramas neste sistema também são, tal qual as demonstrações, objetos sintáticos.

Mas, em quê a audiência ganharia em termos de compreensão e controle cognitivo ao optar por demonstrações sintáticas ao invés das diagramáticas? É verdade que a forma lógica acima é uma outra maneira (legítima, frise-se) de representar um mesmo raciocínio.

Todavia, também é verdade que a versão homogênea exige uma série de inferências que, na versão euclidiana, são trivialmente visualizadas no diagrama. A questão pelas habilidades cognitivas que uma audiência precisa ter para que compreenda e verifique a correção duma demonstração não pode ser subestimada. No caso da geometria de Euclides, falou-se da capacidade de manipular artefatos gráficos e linguísticos e verificar quando um atributo co-exato é exibido pelo diagrama. No sistema de Avigad, Dean & Mumma, por outro lado, todas as habilidades estão relacionadas ao domínio duma linguagem formal e uma atenção à aplicação de regras de inferência. São habilidades distintas. No entanto, a transição de uma demonstração para outra não é feita gratuitamente, sem haver uma perda no controle cognitivo. Agora, uma questão que não é destacada por estes autores é que mesmo num processo de axiomatização é preciso ater-se a alguns elementos epistemológicos concernentes à manipulação simbólica. Ao se debruçar sobre essas questões, Kleene disse o seguinte:

> As asserções da metateoria precisam ser compreendidas. As deduções devem trazer convicção. Precisam proceder através de inferências intuitivas e não como nas deduções num sistema formal por meio de aplicação de regras de inferência[206].

Curioso notar, junto a essa fala de Kleene, que Carnap também diz que mesmo num sistema axiomático algumas regras podem ser assumidas implicitamente pela audiência[207]. Professores de lógica por vezes deixam de enunciar regras de formação sob a suposição de que a atenção aos exemplos bastaria. No entanto, poderia ocorrer dum aluno escrever "ΛAB", "ABΛ" ou "!AB" por não encontrar regra alguma que determine quais concatenações simbólicas definem uma fórmula bem formada. Ora, esta era uma das principais críticas feitas a Euclides, qual seja, que não há regras concernentes à manipulação diagramática enunciadas explicitamente. Esta falta, contudo, pode ser esclarecida doravante a partir da sua prática.

Estudou-se até o momento as reconstruções lógico-matemáticas da geometria euclidiana através das axiomatizações de Hilbert e Avigad, Dean & Mumma, respectivamente. Viu-se que a proposta de Avigad, Dean & Mumma era conseguir capturar a lógica subjacente à prática matemática euclidiana baseada em demonstrações heterogêneas. Por outro lado, observou-se também que, historicamente, o conhecimento matemático parece prescindir da explicitação dessa lógica subjacente. Viu-se também que ambas as axiomatizações pressupõem uma dicotomia entre demonstrações ideais (completas) e reais

---

[206] S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*. Groningen, 1952, p. 62.
[207] Ver Carnap, *The Logical Structure of the World*, Tradução: Rolf A. George, Berkeley, 1967, p. 271. Primeira edição publicada em 1928 com o seguinte título: *Der logische Aufbau der Welt*.

(incompletas). Resta investigar agora a pertinência dessa dicotomia ao âmbito do modelo clássico de ciência.

3.7. O modelo clássico de ciência

O modelo de ciência decorrente do sistema axiomático-formal de Hilbert estabelece que uma demonstração é uma estrutura dedutiva homogênea, ou seja, expressa unicamente por representações linguísticas. Apesar das diferenças já assinaladas, essa estandardização do conhecimento matemático sob a perspectiva linguística é comparável à ciência demonstrativa aristotélica.

Willem de Jong & Arianna Betti vão além e argumentam que é possível abarcar o modelo de racionalidade científica que vai do século V a.C. até os dias atuais no chamado *modelo clássico de ciência*[208]. Os requisitos lógicos e epistêmicos destacados por de Jong & Betti são os seguintes. Uma ciência deveria encerrar um conjunto de proposições verdadeiras sobre um domínio de conhecimento. Dentre essas proposições, algumas são demonstradas (teoremas) e outras, não. As proposições que não são (nem podem ser) demonstradas são os primeiros princípios que devem anteceder os teoremas no processo inferencial e ser melhor conhecidas que estes. Em ambos os tipos de proposições figuram termos primitivos, que não são definidos, e os derivados, definidos mediante os primitivos. Assim sendo, uma demonstração, desde essa perspectiva contemporânea, é uma estrutura linguística; mais especificamente, consiste numa sequência de silogismos científicos tal que, cada premissa ou é um primeiro princípio, ou um teorema.

Havíamos antecipado no Capítulo 2 que essa concepção homogênea de demonstração era compatível com a ciência demonstrativa de Aristóteles. No Livro I dos *Analíticos posteriores* Aristóteles discrimina os princípios da ciência demonstrativa em *thesis* (definições e hipóteses) e axiomas. Havíamos antecipado ali que um dos atributos desses princípios era a indemonstrabilidade, ou seja, não poderiam ser a conclusão em um silogismo científico. Segue-se daí, argumentamos, que esses princípios são independentes. Aristóteles, na verdade, oferece vários requisitos para os primeiros princípios. Diz ele, com efeito, que os primeiros princípios devem ser verdadeiros, primeiros e imediatos (i.e., indemonstráveis);

[208] Ver W. R. De Jong & A. Betti, The Classical Model of Science: a millennia-old model of scientific rationality. *Synthese*, Volume 174, Issue 2, p. 185–203, 2010. Ver também W. R. De Jong, The analytic-synthetic distinction and the classical model of science: Kant, Bolzano and Frege, *Synthese* 174, p. 237-261, 2010; W. R. D Jong, Bernard Bolzano: Analyticity and the Aristotelian model of science, *Kant-Studien,* 92, p. 328–349, 2001; S. Lapointe, Bolzano a priori knowledge, and the Classical Model of Science. *Synthese* 174, p. 263–281, 2010.

com relação à conclusão, os primeiros princípios devem ser ainda mais conhecidos, anteriores e causais.

Na maioria das vezes que Aristóteles quer exemplificar sua ciência demonstrativa ou os silogismos científicos ele recorre às matemáticas, sobretudo a geometria[209]. É inevitável concluir, por isso, que essas disciplinas constituíam para ele o mais alto grau a ideia de ciência demonstrativa. Supõe-se que tal era o caso porque as disciplinas matemáticas poderiam ter avançado muito mais do que as outras ciências do catálogo platônico. Sabe-se que já no século IV a.C. circulavam tratados matemáticos chamados "elementos" precisamente porque tratavam de temas que constituíam os elementos de áreas mais avançadas das matemáticas[210]. Dissemos no Capítulo 2, porém, que o conhecimento sobre a matemática pré-euclidiana já era escasso na época de Proclus, como é possível inferir do fato de não existir nenhuma descrição historiográfica do período, muito menos comparações entre a matemática euclidiana com os antecessores.

Do que foi exposto no Capítulo 2 pode-se concluir que os princípios euclidianos satisfazem os três primeiros critérios, apesar do necessário esclarecimento das diferenças entre postulados de construção e hipóteses. Os axiomas de Hilbert, como visto neste capítulo, também satisfazem algumas dessas exigências, indo muito além do que proposto originalmente, posto que também seria necessário demonstrar a consistência desses princípios. Mas o método axiomático-formal, como também já esclarecido, se limita a esses critérios lógicos. Posto que o conteúdo proposicional não é levado em consideração, não poderia exigir que o axioma fosse mais conhecido que a conclusão. O único critério sobre o qual não falamos é que os princípios sejam causais. Discutiremos essa questão no Capítulo 5.

A suposta influência de Aristóteles sobre Euclides também serve de pretexto para considerações sobre as relações entre lógica e matemática na Grécia Clássica[211]. Algumas evidências documentais de fato respaldam essa interpretação. Como já antecipado, Proclus foi buscar em Aristóteles os subsídios para discutir os princípios euclidianos, não hesitando em propor a exclusão desta lista aqueles que, interpolados ou não, estavam em desacordo com os critérios aristotélicos. Mas essa não é a única vez que Euclides é lido à luz da doutrina aristotélica do conhecimento demonstrativo. Isso já era feito por Alexandre de Afrodísias. Proclus tentou reduzir as demonstrações euclidianas à parte dedutiva, identificando com isso o conhecimento matemático com a contemplação de teoremas e deixando de lado a prática

---

209 Ver Aristóteles, *Primeiros analíticos* I.24, 41b13-22, I.35, 48a29-39.
210 Proclus, *In Euclidis*, 72-75.5.
211 Martha Kneale & William Kneale, *The Development of Logic,* New York, 1962, p. 2-7, 308.

intelectual baseada na resolução de problemas. Argumentou-se que essa mudança de perspectiva estava associada com o interesse do comentador em salientar o suposto projeto fundacional de Euclides, especialmente sua ligação com Platão.

Ian Mueller, porém, diverge. Ele argumentou que tanto a lógica peripatética quanto a estóica seguiram rumos diferentes dos que tomaria a matemática. Então, é no mínimo problemática a tese acerca dum desenvolvimento conjunto entre a lógica e a matemática na Antiguidade, quer seja no sentido de se colocar a primeira como uma ferramenta analítica da segunda, quer seja no sentido de propor a segunda como a expressão acabada da primeira[212]. Mueller ainda argumenta, primeiro, apontando para o fato de a estrutura típica das demonstrações euclidianas não exibirem interesse algum em torná-las sequências silogísticas[213]; segundo, lembra que Aristóteles não fez uso de paradigmas matemáticos para ilustrar a teoria do silogismo nos *Primeiros analíticos* e quando fala da matemática a passagem não guarda uma aproximação significativa com a silogística[214]; por fim, menciona o fato de nem Eudemo de Rodes, que fora aluno de Aristóteles e teria escrito um livro sobre a história da matemática grega, nem Alexandre de Afrodísias, do lado dos peripatéticos, tampouco Crísipo de Solos, dentre os estóicos, se preocuparam em expor argumentos matemáticos sob uma perspectiva estritamente lógica[215].

A tese esposada por Mueller provoca uma reflexão a respeito da originalidade da doutrina aristotélica da demonstração, pois significa que pela primeira vez se procurou uma maneira de dispensar as justificativas diagramáticas a partir de um tipo de análise lógica. Mueller não discutiu essa possibilidade. Ora, o modelo clássico de ciência pode ser entendido como um tipo de reconstrução racional de uma determinada teoria científica. Quer isto dizer que ela não é necessariamente uma descrição factual do estado atual das ciências. Os cientistas, como já salientado, não têm o hábito de justificar suas afirmações através de silogismos. Eis porque os representantes do modelo clássico costumam pensar que o objetivo de uma epistemologia (de matriz aristotélica, frise-se) é proporcionar uma reconstrução de partes específicas de determinadas disciplinas mediante uma análise lógica. Ou seja, para a epistemologia, a dimensão fática da ciência seria secundária porque se pode analisar logicamente os argumentos ali empregados, de modo a mostrar que se adequam às categorias

212 Para uma visão divergente, ver Kneale & Kneale, *The Development of Logic*, New York, 1962, p. 308.
213 Mueller, "Greek Mathematics and Greek Logic", In Corcoran J. (eds) *Ancient Logic and Its Modern Interpretations*. Synthese Historical Library, vol 9. Springer, Dordrecht, 1974, p. 37-48.
214 Mueller, "Greek Mathematics and Greek Logic", In Corcoran J. (eds) *Ancient Logic and Its Modern Interpretations*. Synthese Historical Library, vol 9. Springer, Dordrecht, 1974, p. 48-50.
215 Mueller, "Greek Mathematics and Greek Logic", In Corcoran J. (eds) *Ancient Logic and Its Modern Interpretations*. Synthese Historical Library, vol 9. Springer, Dordrecht, 1974, p. 54-57.

aristotélicas. Nisso se fiaram diversos autores contemporâneos, como os representantes do Círculo de Viena que mencionamos na última seção, mas também alguns modernos, como o matemático jesuíta Cristóvão Clávio, sobre o qual falaremos nos próximos capítulos, para o qual as demonstrações geométricas de Euclides poderiam ser reconstruídas mediante o aparato da lógica aristotélica. Apesar dos *Analíticos posteriores* serem considerados primeira codificação do modelo clássico, o ápice dessa perspectiva estaria na Modernidade, mais precisamente entre os séculos XVI e XVII.

Há, porém, uma divergência não contemplada por Willem de Jong & Arianna Betti que emerge da comparação de Euclides e Aristóteles: o uso de diagramas. Dadas as exigências feitas pelo modelo clássico de ciência, demonstrações parcialmente baseadas em diagramas, como as de Euclides, não poderiam ser demonstrações genuínas. A solução seria fazer uma análise lógica das provas de Euclides de modo a mostrar que, por trás do aparente uso dos diagramas, os raciocínios por ele empregados repousam sobre estruturas linguísticas. Eis, portanto, o ponto de convergência entre Aristóteles e Hilbert. Por outro lado, é possível também que o modelo clássico de ciência, sob um ponto de vista normativo, resulte numa segregação de outros recursos argumentativos igualmente legítimos que poderiam compor o conhecimento científico, mas que não foram contemplados originalmente por Aristóteles.

3.8. Observações finais

Discutiu-se no Capítulo 2 a possibilidade de pensar a matemática euclidiana desde seu pertencimento à tradição grega de resolução de problemas. Todavia, ao colocar Euclides na mesma tradição iniciada por Platão sobre a natureza dos princípios matemático — tradição essa que culminaria na ciência demonstrativa de Aristóteles —, seu método inferencial baseado em diagramas não foi devidamente estudado por seus comentadores, especialmente Proclus, que reduziu as demonstração ao núcleo linguístico.

Para a literatura especializada, particularmente nos séculos XIX e XX, os diagramas são apenas recursos heurísticos, i.e., dispositivos psicotécnicos úteis no processo da descoberta de resolução de novos problemas ou de novos teoremas. Essa crença consolidou-se na década de 1930, graças, em grande parte, aos estudos metamatemáticos de Hilbert. Embora não se possa projetar retroativamente a diferenciação entre os contextos da descoberta e o da justificação sobre os *Analíticos posteriores*, ela é aqui mencionada como uma linha interpretativa sobre uma possível solução dentro do modelo clássico de ciência que surge da comparação entre a atividade real do cientista e a doutrina filosófica acerca do conhecimento científico.

Objeta-se o uso dos diagramas em provas matemáticas, em primeiro lugar, porque são imperfeitos. Por exemplo, as linhas desenhadas à mão livre, ou com o auxílio da régua, etc., têm espessura, o oposto do que diz a segunda definição de Euclides. Os objetos da geometria e os da aritmética, que não devem ser confundidos com os meios de representação, i.e., os diagramas, é que conseguem satisfazer as exigências métricas (ou exatas) das definições. Como os diagramas não podem satisfazer as exigências métricas dos objetos que representam, não poderiam, portanto, desempenhar nenhum papel epistêmico nas provas matemáticas.

A ênfase na análise lógica, contudo, especialmente em autores contemporâneos, afasta da epistemologia outras ferramentas e estratégias argumentativas tão legítimas quanto as da lógica e que não foram contempladas por Aristóteles. Esse é o caso dos argumentos parcialmente baseados em diagramas que Euclides usa ao longo dos *Elementos*. Contrariando os requisitos abrangidos nos *Analíticos posteriores*, Euclides emprega os diagramas repetidas vezes para justificar afirmações feitas nas demonstrações. Seus argumentos não são exclusivamente linguísticos.

Nas últimas décadas diversos autores têm chamado atenção para a importância em se reconsiderar as demonstrações matemáticas no contexto das práticas argumentativas em que estão inseridas. Ou seja, em vez de partir da concepção ideal de demonstração prevista no modelo clássico, a proposta doravante é entender também as demonstrações reais, mesmo que distantes dos preconceitos filosóficos. E esse poderia ser o caminho a se adotar relativamente a Euclides. Nesse sentido, o uso dos diagramas faz parte da explicação do fato de um estudante da geometria à moda de Euclides não incorrer nalgum erro. Ou seja, não se poderia compreender a estabilidade epistemológica dos *Elementos* sem compreender (ou tentar compreender) a prática matemática que subjaz a essa obra; e não se poderia compreender essa prática matemática sem compreender como alguém poderia usar, legitimamente, aquelas representações. Esta nova abordagem não pretende negar os méritos da análise lógica. Trata-se de apontar para uma maneira de obter conhecimento matemático através de representações linguísticas e diagramáticas.

4. Entimemas e audiência: uma investigação retórica da prática matemática euclidiana

4.1. Resumo do capítulo

Até o presente momento estivemos considerando os *Elementos* de Euclides sob o ponto de vista lógico-linguístico. Viu-se, em primeiro lugar, como esse ponto de vista pode ser extraído a partir de certa interpretação dos *Analíticos posteriores* de Aristóteles. Viu-se também, em segundo lugar, de que maneira o método axiomático-formal de Hilbert se aproxima desse ideal de ciência demonstrativa. Em ambos os casos, são flagrantes as diferenças em relação a Euclides, quer seja nos tipos de princípios adotados, quer seja na linguagem empregada, quer seja no modo de apresentação, quer seja, em especial, no método inferencial baseado em diagramas. Este capítulo apresenta um estudo das demonstrações diagramáticas euclidianas do ponto de vista retórico. Discute-se a possibilidade de o método inferencial euclidiano ser interpretado à luz dos entimemas, ou seja, os argumentos retóricos dependentes da audiência. Argumenta-se que embora os entimemas sejam dependentes da audiência, daí a impressão de que são argumentos com lacunas, eles não comprometem a correção das demonstrações.

4.2. Introdução

Nos *Elementos* de Euclides, os diagramas geométricos são usados para justificar afirmações feitas no decorrer das demonstrações. Tal recurso é frequentemente criticado pela literatura especializada sob a alegação de ser um método inferencial não rigoroso. Um método inferencial rigoroso deveria estar em conformidade com a definição *standard* de demonstração: uma sequência de fórmulas onde cada uma delas, ou bem é um axioma, ou bem se segue da aplicação prévia de uma regra de inferência válida. Com essa definição, que identifica justificação matemática e derivação de fórmulas, os diagramas passam a ser apenas recursos psicotécnicos no processo de descoberta (heurística).

Nas últimas décadas, esse entendimento vem sendo questionado. Argumenta-se, com efeito, que dar uma demonstração é antes de mais nada dar razões para algo e não somente estabelecer que uma afirmação pode ser derivada dentro de um sistema de fórmulas. Sob essa perspectiva, a literatura filosófica tem chamado atenção para a importância em se reconsiderar o papel epistemológico desses artefatos gráficos nas demonstrações matemáticas. No tocante aos *Elementos*, viu-se no Capítulo 2 como Kenneth Manders argumentou que a suposição de uma prática matemática euclidiana pode garantir que somente um tipo específico de afirmações seja justificado pela parte visual e que isso, apesar das reincidentes objeções a Euclides, não compromete a correção dos resultados matemáticos alcançados por ele.

O objetivo deste capítulo é estudar, no âmbito da filosofia da prática matemática, a aplicação da retórica aos argumentos diagramáticos de Euclides. A Seção 4.2 propõe algumas reflexões sobre as diferenças entre demonstrações ideais, aquelas que constituem o objeto de estudo de Platão, Aristóteles e Hilbert e que, segundo a literatura especializada do século XX, deveria ser o principal objetivo da filosofia da matemática, e as demonstrações reais, chanceladas pela existência, ou a suposição de existência, de uma prática matemática regrada. A Seção 4.3 discute a tese de Lassalle Casanave & Panza (2015) e Lassalle Casanave (2019) segundo a qual o método inferencial euclidiano pode proceder por entimemas. Para esses autores, a retórica clássica (e não apenas a lógica) poderia oferecer uma explicação das demonstrações diagramáticas euclidianas a partir da teoria dos entimemas, i.e., argumentos válidos, porém dependentes da audiência. Por retórica clássica deve-se entender a retórica aristotélica. Argumenta-se que essa abordagem retórica pode ser aliada à concepção de prática matemática da qual fala Manders, sobretudo em seu aspecto normativo. Dando seguimento ao estudo retórico, a Seção 4.4 discute algumas propostas parecidas à de Lassalle Casanave & Panza. Consideramos aí também algumas possíveis objeções. A Seção 4.5 trata do conceito de demonstração canônica, i.e., de demonstração completa segundo os princípios de uma teoria. São consideradas também as limitações da análise lógica ao estabelecer como única espécie de demonstração canônica a definição *standard*. A Seção 4.6 apresenta algumas evidências a respeito das aproximações entre a retórica (pré-aristotélica) e as matemáticas na Antiguidade como forma de tentar esclarecer o estilo argumentativo de Euclides. A Seção 4.7 considera a possibilidade da retórica oferecer um método de estudo historiográfico das ciências exatas.

4.3. Demonstrações ideais e reais

As demonstrações euclidianas contemplam dois tipos de justificativas: as textuais (definições, postulados, noções comuns e proposições previamente resolvidas ou demonstradas) e as diagramáticas. O método inferencial euclidiano, portanto, destoa muito do ideal de demonstração vislumbrado pelos *Analíticos posteriores* de Aristóteles, haja vista a maneira como o papel epistemológico dos diagramas é muito reduzido. Ao longo do século XX, o distanciamento das demonstrações euclidianas em relação a essa concepção homogênea tem servido de oportunidade para se criticar o método demonstrativo dos *Elementos*. Euclides passou a ser acusado de deixar lacunas lógicas em seus argumentos e, por essa razão, elas não seriam rigorosas. Essas demonstrações estariam mais próximas desse ideal de rigor se lhes fossem acrescentados novos princípios que preencheriam as lacunas, ainda que para isso fosse preciso recorrer a uma teoria matemática muito diferente daquela exposta nos *Elementos*, como o método axiomático-formal exposto por Hilbert em *Fundamentos da geometria*. Seria, pois, uma opção conciliadora entre a total rejeição dos argumentos euclidianos e a total admissão dos diagramas sob as condições supramencionadas. Esse entendimento assume que as demonstrações euclidianas correspondem apenas à parte dedutiva (*apodeixis*). Há, porém, uma outra opção conciliadora, mediante a qual são estabelecidas condições bem específicas para o uso dos diagramas que tentam evitar os problemas da inexatidão e da universalização. Nisso consiste as recentes tentativas de reconstruir a prática matemática euclidiana.

Apesar de o diagrama ser usado como meio de justificação, não se pode acusar Euclides de ter incorrido nalgum erro. O estudo da prática matemática euclidiana, baseada no uso de justificativas diagramáticas, pode ajudar a esclarecer a estabilidade da teoria euclidiana. Para isso, seria preciso considerar não apenas os aspectos lógicos (validade) e metamatemáticos (consistência), como também uma dimensão normativa relativa a controle de artefatos gráficos e textuais. Nesse sentido, deve-se considerar a separação feita por Kenneth Manders entre afirmações exatas, fornecidas apenas pela parte linguística, e afirmações co-exatas, fornecidas pelo diagrama.

Como visto nos capítulos anteriores, a ciência matemática tem como objetivo a invenção de métodos, ferramentas e estratégias para resolver problemas previstos na agenda da investigação científica, ou mesmo antecipá-los, quer sejam esses problemas de natureza puramente teórica, quer sejam concernentes à aplicabilidade. Dentro deste quadro, seria possível dizer também, sob a ótica da retórica, que um matemático deve pensar a maneira como seu raciocínio é exposto diante sua comunidade de pares e como esta emprestará assentimento à verdade dum teorema. Portanto, reter o olhar analítico apenas às estruturas dedutivas subjacentes às demonstrações matemáticas, trazendo-as à luz por meio dum maquinário formal ignora que a matemática também é uma atividade coletiva.

Por tudo que foi dito, insistimos em dizer: a demonstração pertence ao rol de preocupações epistemológicas e não apenas lógicas. O resgate duma concepção epistemológica de demonstração é destacado por Oswaldo Chateaubriand em *Logical forms* (2005). Diz ele:

> As demonstrações fazem parte da atividade matemática; servem para estabelecer resultados e fazer com que as pessoas vejam a configuração do terreno. Os dispositivos que são usados nas demonstrações dependem muito do público e da finalidade das demonstrações, mas geralmente são muito mais variados do que aquilo que fica encapsulado nas demonstrações idealizadas de uma teoria das demonstrações[216].

Sob esse prisma, os recursos visuais, circunscritos às determinações normativas já discutidas, podem ser tão legítimos quanto os linguísticos. No contexto de uma prática matemática, os recursos extralinguísticos, como os diagramas, intuição e até mesmo gestos (considerados em contextos bem específicos), auxiliam no processo de compreensão da demonstração, ajudam a “ver claramente o que está acontecendo”, para manter uma analogia do próprio Chateaubriand. “Na verdade, mesmo quando estudamos uma demonstração que é apresentada de uma forma mais padronizada, em um livro ou em um *paper*, nós mesmos fornecemos esses recursos visuais para entender a demonstração”[217].

O principal erro nas objeções às demonstrações euclidianas, como as dos membros do Círculo de Viena, foi não ter se atentado para a divisão de labuta entre texto e diagrama nas demonstrações euclidianas, i.e., não ter diferenciado as afirmações que podem ser fornecidas pelo texto e aquelas que são fornecidas pelo diagrama. Nos *Elementos*, uma propriedade exata, em geral, não é extraída dos diagramas. Já as propriedades diagramáticas, as co-exatas, embora não sejam autorizadas pelo texto, não dependem da precisão com que os diagramas são desenhados, senão do controle sobre a manipulação da figura, controle este que assegura a estabilidade da prática matemática. O sucesso euclidiano em extrair apenas atributos co-exatos dos diagramas reside precisamente na restrição imposta às respostas possíveis ao artefato gráfico. Uma prática matemática como a euclidiana deve direcionar a disciplina no manuseio de diagramas unicamente para poder-se retirar afirmações co-exatas.

Tudo isso considerado, pode-se concluir que as críticas às demonstrações diagramáticas euclidianas negligenciaram a prática matemática euclidiana, contexto no qual

---

216 Chateaubriand, *Logical Forms. Part II: Logic, Language, and Knowledge* (Campinas: Coleção CLE, 2005) 305.
217 *Ibid.,* 307; ver 321, n. 11.

os diagramas podem ser legitimamente utilizados. Isso é visível no comentário de Heath, que projetou sobre o texto euclidiano o método axiomático-formal de Hilbert. Dito isso, convém agora discutir a aplicação da retórica a esses argumentos.

4.4. Demonstrações e entimemas

A estratégia costumeira de reconstruir-se apenas a teoria dos *Elementos* negligencia aspectos importantes da prática prescrita por esta obra. A estabilidade da prática matemática permite que os diagramas sejam usados de maneira que só podem justificar propriedades co-exatas. A abordagem à argumentação matemática desde a perspectiva de sua prática oferece espaço para se reconsiderar também a concepção dominante de análise filosófica na literatura contemporânea, a qual só reconhece legitimidade epistemológica nos argumentos linguísticos. Essa nova abordagem está no cerne da análise retórica de Lassalle Casanave & Panza. Eles argumentam que é possível usar as categorias da retórica aristotélica (audiência e entimemas) com a finalidade de explicar as demonstrações parcialmente diagramáticas de Euclides[218].

À primeira vista nada poderia estar mais distante das demonstrações matemáticas do que a arte retórica. Essa percepção resulta do uso rotineiro da retórica para respaldar posições relativistas na moral ou na epistemologia. Na melhor das hipóteses, a retórica seria o equivalente a crítica literária. Em ambos os casos, persiste a ideia de que não pertence ao escopo da retórica o estabelecimento da verdade[219] através de argumentos corretos e válidos. Tais são as concepções de retórica predominantes no século XX, seja entre seus detratores, seja entre seus defensores. Ocorre que na *Retórica*, Aristóteles chamou atenção para o fato dos discursos terem um núcleo argumentativo, no qual se pode falar, sim, do estabelecimento da verdade. São os entimemas.

Aristóteles define a arte retórica como a capacidade de teorizar sobre o que é adequado em cada caso com a finalidade de persuadir. Essa arte diz respeito à exposição pública do discurso tendo como base o conhecimento comum que as pessoas compartilham. O orador precisa adequar o seu discurso e, por conseguinte, seus argumentos, seja porque a audiência a quem se destina o discurso não pode ou não se interessa em acompanhar uma

---

[218] Alguns dos pontos-chave dessa análise estão contemplados por Lassalle Casanave, Entre la retórica y la dialéctica, *Manuscrito*, v. 31, n. 1, 2008, p. 12). Ver também Gisele Dalva Secco, *Entre provas e experimentos : uma leitura wittgensteiniana das controvérsias em torno da prova do Teorema das Quatro Cores*, Rio de Janeiro, Tese (Doutorado), 2013, cap. 3.

[219] Essa é a crítica de Carlo Ginzburg em *Relações de força,* São Paulo, 2002. Ginzburg nota, corretamente, que o relativismo não retrata, na retórica, a tradição clássica, especialmente a de Aristóteles.

longa sequência inferencial, como, por exemplo, durante um sermão na igreja ou um discurso no Parlamento, seja porque a audiência tem um razoável grau de conhecimento sobre o tema, e, por isso, não precisa ser lembrada a todo instante de coisas circunstancialmente triviais, como quando o advogado apresenta sustentação oral perante um juiz. Daí emerge a ideia de Lassalle Casanave & Panza de que as provas matemáticas também são dependentes da audiência.

A argumentação retórica, ainda segundo Aristóteles, pode ser persuasiva relativamente ao orador, à audiência ou ao discurso. É persuasiva relativamente ao orador quando este se mostra alguém digno de fé. É a credibilidade que uma autoridade goza por dominar (ou que aparenta dominar) com profundidade um tema[220]. É persuasiva relativamente à audiência por conseguir imprimir uma determinada emoção no público. Por exemplo, tentar fazer com que o júri tenha raiva de um suspeito ao revelar um comportamento deste visto como imoral, embora não necessariamente ilegal. E finalmente, é persuasiva relativamente ao discurso quando se busca estabelecer que algo é verdadeiro ou que aconteceu. A novidade da *Retórica*, como o próprio autor não deixa de ressaltar, é esse último item[221].

Aristóteles afirma que o principal erro dos compêndios de retórica da época — leia-se os escritos por logógrafos sofistas — era que seus autores entendiam que a finalidade exclusiva da retórica era atiçar as emoções da audiência ou atacar o caráter dos oradores. Ou seja, a persuasão dependia apenas do orador e da audiência. Ignorava-se, portanto, o núcleo argumentativo dos discursos. Para Aristóteles, o núcleo do argumento retórico, que é uma espécie de demonstração, é o entimema[222]. O entimema é um silogismo no qual uma das premissas não precisa ser verbalizada[223].

---

[220] Entende-se que a acepção primária de credibilidade, i.e., o ser digno de fé (*fidēs*), é epistêmica, embora se possa ampliar seu escopo para abarcar as *auctoritas*, ou seja, as autoridades literárias, como Homero (poética), Cícero (oratória), Santo Agostinho (teologia), etc. A falácia de autoridade, por sua vez, consiste em deduzir que uma proposição é verdadeira porque uma autoridade também a considerava assim.

[221] Para entender a originalidade da retórica aristotélica é preciso investigar o lugar da *Retórica* no pensamento aristotélico. No *Vitae philosophorum* (V.22-26), de Diógenes Laércio, aparecem os seguintes títulos: *Sobre a retórica, ou Grylus* (Περὶ ῥητορικῆς ἢ Γρῦλος); *Arte retórica*, 2 Livros (Τέχνης ῥητορικῆς α᾽ β᾽); *Coleção das artes*, 2 Livros (Τεχνῶν συναγωγὴ); *Entimemas retóricos*, I Livro (Ἐνθυμήματα ῥητορικὰ α᾽); *Divisão dos entimemas*, I Livro (Ἐνθυμημάτων διαιρέσεις α᾽); *Sobre o estilo*, 2 Livros (Περὶ λέξεως α᾽ β᾽). A respeito do primeiro título, Quintiliano diz que *Grylus* foi escrito em forma de diálogo e que trazia críticas parecidas com as de Platão no *Górgias*.

[222] Aristóteles, *Retórica*, III.17: "As provas por persuasão também devem ser demonstrativas" (τὰς δὲ πίστεις δεῖ ἀποδεικτικὰς εἶναι). Intérpretes contemporâneos da *Retórica* costumam concordar sobre a centralidade dos entimemas e, por conseguinte, da perspectiva racional adotada por Aristóteles para resgatar a persuasão dos sofistas. Ver: E. M. Cope, *An introduction to Aristotle's Rhetoric*, Londres, 1867; John Henry Freese (Ed.), *The Art of Rhetoric*, Londres, 1926; W. M. A. Grimaldi, *Aristotle, Rhetoric I-II: A Commentary*, New York, 1980/1988; Carlo Ginzburg em *Relações de força,* São Paulo, 2002; Manuel Alexandre Júnior, Paulo Farmhouse Alberto & Abel do Nascimento Pena (Ed.), *Retórica*, 2a ed., Lisboa, 2005.

[223] Aristóteles, *Retórica,* 1357a15-19.

Aristóteles dá duas razões para que o orador precise usar entimemas. Em primeiro lugar, deduções longas tornam o raciocínio obscuro, o que pode comprometer a atenção da audiência, além de dificultar a retenção de informações relevantes na memória. Se, portanto, a retórica trata de meios de persuasão diante uma audiência incapaz de acompanhar um fio de raciocínio muito complexo, situação, aliás, antecipada por Aristóteles, é imperativo que a principal linha argumentativa seja exposta com brevidade. Recorde-se que o júri, mesmo hoje em dia, é composto por cidadãos leigos, que passam horas ouvindo as sustentações orais da defesa e da acusação. Em segundo lugar, enunciar todos os passos implica em enunciar coisas evidentes[224].

Ainda que toda ciência demonstrativa deva partir de primeiros princípios, Aristóteles não estipula que os princípios sempre devem ser verbalizados. Se é bastante óbvio para a audiência qual o tema da disciplina e que os objetos aí considerados existem, então não seria preciso explicitar as definições nem as hipóteses. Eis porque esses princípios são explicitados com mais frequência nas matemáticas do que na filosofia natural. Por exemplo, ao ler a definição euclidiana de reta, alguém poderia ser levado a crer que a demonstração trata *daquele* traço físico; e tão-logo notasse alguma imperfeição, pensaria que a geometria é uma disciplina imprecisa. (Há exemplos como esse na literatura filosófica.) Além disso, se os axiomas são comuns porque são comuns a todos os homens (e, por conseguinte, a todo raciocínio), então explicitá-los seria uma redundância. Diz Aristóteles:

> Não há razão para que certas ciências não devam ignorar algum desses três itens. Por exemplo, omitir a suposição da existência do gênero, se a sua existência é evidente (pois a existência do número não é tão óbvia quanto a do calor e do frio), ou a suposição do sentido dos atributos, se também é manifesto; da mesma maneira no caso dos princípios comuns, o sentido de "quando são subtraídos iguais de iguais os restantes são iguais" não é suposto, pois é bem conhecido[225].

Com relação aos axiomas, mais especificamente, Aristóteles diz: "Nenhuma demonstração pressupõe que não seja possível afirmar e negar ao mesmo tempo, a menos que a conclusão também deva ser provada dessa forma"[226]. A referência é ao argumento por redução ao absurdo, no qual demonstra-se a verdade de uma proposição ao mostrar que a suposição de sua negação implica uma contradição. Ou seja, o princípio da não-contradição é condição para haver demonstração, mas apenas em reduções ao absurdo seria preciso explicitá-lo.

---

[224] Aristóteles, *Retórica*, II.22. Ver *Tópicos* VIII.11, 162a15-18. No caso dos discursos jurídicos, a brevidade era fundamental. Durante os julgamentos, os limites dos discursos da acusação e da defesa eram estabelecidos por lei e medidos por um relógio de água chamado clepsidra.

[225] Aristóteles, *Analíticos posteriores*, I.10, 76a37-76b16-21.

[226] Aristóteles, *Analíticos posteriores*, I.11, 77a10-22.

Ainda assim, Aristóteles não dá nenhum indício claro sobre a possibilidade de se falar em “entimemas científicos”. E mesmo que essa possibilidade fosse contemplada, para Aristóteles, como já antecipado, a fundamentação da teoria dos entimemas reside em sua silogística. Pode-se pensar, por isso, que as demonstrações diagramáticas de Euclides são sempre entimemáticas e que, portanto, a análise lógica não faz senão expor a versão canônica, i.e., sua forma verdadeira e completa. É um argumento análogo ao de Avigad, Dean & Mumma que discutimos no Capítulo 3.

O fundamental da teoria dos entimemas é que a adaptação do argumento não é feita em detrimento de sua correção. Atine-se para este exemplo: o Presidente do Senado não pode ser reeleito porque já cumpriu dois anos de mandato. A conclusão é esta: “O Presidente do Senado não pode ser reeleito”. A premissa, anteposta por uma preposição, é esta: “[O Presidente do Senado] já cumpriu dois anos de mandato na mesma legislatura”. Por que, então, alguém aceitaria aquela conclusão, se, do ponto de vista lógico, a verdade da premissa não implica a verdade da conclusão? Ora, porque um cidadão brasileiro que conhece a Constituição Federal deve saber também isto: os respectivos presidentes do Congresso Nacional, i.e., do Senado e da Câmara, não podem ser reeleitos após dois anos de mandato na mesma legislatura (art. 57, §4). De posse dessa informação, chega-se ao seguinte silogismo típico:

Nenhum membro da Mesa Diretora está apto à reeleição na mesma legislatura
O Presidente do Senado é membro da Mesa Diretora

O Presidente do Senado não está apto à reeleição

O argumento acima é válido. E era válido mesmo antes, quando a premissa era apenas presumida da audiência. Um entimema é um argumento cujas premissas verdadeiras já são aceitas pela audiência e que, por isso, não precisam ser verbalizadas. Por essa razão se pode falar da retórica como o estudo dos meios objetivos através dos quais uma prova é apresentada a audiências diferentes, deixando de lado (mas não menosprezando) a manipulação das paixões dos membros da audiência ou a referência ao caráter do orador.

O que se propõe aqui é pensar a retórica desde a perspectiva dos meios como as pessoas tentam persuadir diferentes audiências em diferentes ambientes, pautando-se pela discursividade dos meios e pela publicidade do discurso[227]. O que Aristóteles fez, e foi

[227] Logo, o uso da violência para coagir alguém a fazer ou deixar de fazer algo não é persuasivo. Também não são tipos de persuasão o comandar através de normas legais, como leis e decretos, bem como dar ordens a alguém hierarquicamente inferior, como no exército. A existência da sanção vinculada ao comportamento

mantido por Lassalle Casanave & Panza, foi destacar o núcleo argumentativo do discurso, a saber, os entimemas e os exemplos. O que Lassalle Casanave & Panza tentam fazer é partir dessas afirmações para, então, teorizar a prática matemática euclidiana e a maneira como os diagramas são ali usados.

Ao propor usar a retórica aristotélica nos argumentos heterogêneos de Euclides, Lassalle Casanave & Panza consideram que a exposição de uma demonstração matemática também depende da audiência e, portanto, também admite o uso dos entimemas[228]. Isso não quer dizer, de novo, que seja relevante para o expositor provocar emoções na audiência relativamente a gráficos e fórmulas. Tal como na lógica, não é importante quem expõe o argumento, nem quem o recebe. Mas, para cada audiência, há um repertório de conhecimento comum — e não apenas conhecimento proposicional, frise-se — que a torna apta a acompanhar uma sequência de argumentos mais complexos do que outros. E tudo isso ajuda ou atrapalha a audiência a ter convicção relativamente a um argumento.

Espera-se também que as demonstrações sejam adaptáveis em razão dos meios materiais e, por conseguinte, do modo de exposição. Há casos também em que comunicação científica pode depender da transmissão oral, de maneira que nem todas as informações e habilidades são codificadas nos textos: a gesticulação, a cadência da voz, a ironia, etc., performances que os bons oradores e atores devem dominar, dão vida ao discurso e prendem a atenção da audiência. E como antecipado por Manders, a disciplina diagramática deve contemplar regras de reconhecimento de diagramas. Pode-se conjecturar que tais regras seriam apresentadas no decorrer das comunicações presenciais. Nesse caso, a explicitação verbal dalguma relação topológica é redundante. Se cada entrada textual tem uma saída diagramática, então faz muito mais sentido que o expositor explicite verbalmente *apenas* aqueles atributos que o diagrama não pode exibir. Em outras palavras, do ponto de vista epistemológico, a explicitação linguística dos atributos que os diagramas podem exibir não aumentaria a convicção relativa à demonstração original.

São raras as menções aos entimemas em manuais de lógica. Há uma brevíssima menção aos entimemas no manual de lógica de Irving Copi[229], que, apenas por isso, merece

desobediente torna irrelevante o convencimento da adequação do comportamento à norma. Por outro lado, a publicidade do discurso é uma exigência de objetividade e verificação.

[228] Ver Lassalle Casanave, A. & Panza, M., Pruebas entimemáticas y pruebas canónicas en la geometría plana de Euclides. *Revista Latinoamericana de Filosofía* 41, no. 2, 2015, p. 15.

[229] Copi, *Introdução à lógica*, São Paulo, [1953] 1981.Tradução: Álvaro Cabral. S. C. Kleene também menciona os entimemas em *Mathematical Logic* (1967, §15, pp. 67-73). Ele reconhece, com efeito, que a comunicação ordinária é flexível e adaptável, de maneira que argumentos abreviados são esperados.

ser destacado dentre os demais textos introdutórios, visto que ele é um dos poucos a dizer que também o conhecimento científico envolve o uso de entimemas. Diz ele:

> Na linguagem cotidiana e mesmo na ciência, a maioria das inferências expressa-se entimematicamente. A razão disso é fácil de se entender. Na maioria das polêmicas, há uma grande quantidade de proposições que se pressupõe ser de conhecimento comum. A maioria dos oradores e escritores evitam muitas complicações por não ter que repetir proposições bem conhecidas e, talvez, trivialmente verdadeiras, que os seus ouvintes ou leitores podem perfeitamente suprir por sua iniciativa própria. Além disso, não é invulgar, em absoluto, que um argumento seja retoricamente mais poderoso e convincente, quando enunciado entimematicamente, do que quando enunciado com todos os pormenores[230].

A última frase é fundamental: *o argumento entimemático pode ser tão convincente quanto o argumento detalhado*[231]. Copi assume já no início que os entimemas são "incompletamente enunciados", o que pode significar que são argumentos imperfeitos. Se esta era a intenção dele, não cabe aqui especular, mas é importante ressaltar que a identificação entre argumentos incompletos ou abreviados a argumentos imperfeitos poderia ser feita a partir de passagens dos *Analíticos primeiros* onde Aristóteles cita os silogismos incompletos, expressão essa usada por comentadores para caracterizar os entimemas[232]. Essa é a definição presente nos manuais de Boécio e Pedro Hispânico. Essa identificação é assumida por Pólya[233], Anglin[234] e Fallis[235], para os quais demonstrações completas são sequências de fórmulas bem-formadas onde cada uma delas ou é um axioma ou se segue a partir da aplicação de uma regra de inferência. Portanto, os argumentos abreviados, embora bem articulados, são imperfeitos porque deixariam lacunas[236].

O contraste com a proposta de Lassalle Casanave & Panza é flagrante. Em primeiro lugar, Pólya só reconhece demonstrações linguísticas. Em segundo lugar, equipara demonstrações incompletas a demonstrações com lacunas e, portanto, formalmente inválidas. O que se deixa de dizer num entimema não denota uma inabilidade do orador, mas, o preciso contrário, é o que se pressupõe que ele faça. Por outro lado, Fallis menciona os entimemas dentre os tipos de lacunas em demonstrações matemáticas. Nas palavras dele, lacunas

---

230 Copi, *Introdução à lógica*, São Paulo, [1953] 1981, p. 208.

231 Dos manuais de lógica do século XX, os entimemas são destacadas apenas por Copi (*supra*) e S. C. Kleene (1967, §15, pp. 67-73). Em ambos os casos os comentários são breves, mas acompanhados pelo reconhecimento que a comunicação ordinária é flexível e adaptável. Kleene, porém, ao contrário de Copi, não discute a possível aplicação dos entimemas na argumentação científica.

232 Aristóteles, *Analíticos primeiros*, I.1 24b24. Tanto Cope quanto Burnyeat argumentam que a expressão ἀτελῆ ("incompleto") é uma interpolação.

233 Pólya, *How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton, 1957.

234 Anglin, Mathematics and Value, *Philosophia Mathematica* (2) 6(2), p. 145-173, 1991.

235 Fallis, Intentional Gaps in Mathematical Proofs, *Synthese*, 134, p 45-69, 2003.

236 Ver Pólya, *How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton, 1957, p. 215-220.

entimemáticas são aquelas onde o matemático pode "deixar de fora" por considerar que sua audiência a conhece. Seu argumento, que estranhamente omite Aristóteles, é que um matemático pode optar por deixar lacunas inferenciais por questões de economia argumentativa — manter o texto enxuto e conciso. Com um número apropriado de informação, o matemático pode dar o suficiente para a audiência reconstruir seu raciocínio na sua inteireza[237]. Essas lacunas entimemáticas constituem uma *prática aceitável* dentro da comunidade de matemáticos[238]. Não obstante isso, Fallis não esclarece se esse conceito abarca argumentos parcialmente diagramáticos. Os exemplos usados por ele indicam que estava pensando nas demonstrações linguísticas.

A correção e validade das inferências não têm nada a ver com as paixões ou com os caracteres. Por outro lado, deve-se reconhecer que mesmo um argumento válido pode não ser aceito por uma audiência ao passo que um argumento inválido pode ser aceito como válido. Tal circunstância, aliás, foi ressaltada por Homero como uma característica das deliberações feitas em assembleias:

> Assim arenga Heitor, e os troicos o aclamaram.
> Tolos! Atena lhes roubara a sensatez.
> A Heitor todos aprovam, sua proposta ruim,
> ninguém aprova o plano bom do contendor [Polidamante][239].

Ao enfatizar as demonstrações ao estilo de Euclides, e, depois, as demonstrações formais de Hilbert, a prosa especializada parece dar a devida importância às divergências no curso da história da matemática. Quantos matemáticos já não estiveram convencidos da correção de alguma mirabolante demonstração da quadratura do círculo? Eis a moral da história que Chateaubriand tentou lembrar aos defensores irredutíveis da análise lógica e que, em última instância, como também Lassalle Casanave lembrou, remete a discussão a Aristóteles, como de costume.

Uma das principais características da análise retórica é o entendimento de que as demonstrações matemáticas são adaptáveis aos vários perfis de audiências e que, portanto, para explicar como alguém manipula os diagramas e extrai daí afirmações legítimas, é preciso

---

[237] Tanto Pólya (*How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton, 1957, p. 221) quanto Copi (*loc cit*) consideram que deveria haver uma regra que determinasse que o orador deveria ser bem claro quando fosse usar tais argumentos. Mas aí já não se tem um entimema. Pois, o que caracteriza um entimema é que a proposição suprimida é aceita por todos da audiência.

[238] Fallis, Intentional Gaps in Mathematical Proofs, *Synthese*, 134, 2003, p. 54-56.

[239] Homero, *Ilíada*, XVIII.310-314.

também considerar o tipo de conhecimento comum que é (ou que seria) exigido no contexto dessa prática. Agora, que sejam argumentos abreviados (incompletos) não significa que os entimemas são imperfeitos. Mas, se os entimemas são argumentos abreviados, então existe (ou supõe-se que existe) uma versão detalhada (completa). Em Aristóteles, como já antecipado, a fundamentação da teoria dos entimemas reside em sua silogística, ou seja, a demonstração retórica é somente mais um tipo de silogismo. Portanto, a versão completa de um entimema, em Aristóteles, será um argumento linguístico. Pode-se pensar, por isso, que as demonstrações heterogêneas de Euclides são sempre entimemáticas e que, portanto, a análise lógica não faz senão reconstruir a versão completa. Como ficou dito, a análise retórica não pretende ser um comentário de Aristóteles, mas precisa responder a essa possível objeção.

Lassalle Casanave & Panza diferenciam as demonstrações heterogêneas de Euclides em canônicas e entimemáticas. Demonstrações entimemáticas, como já discutido, são demonstrações abreviadas por causa da audiência e do conhecimento comum compartilhado por ela, a saber, habilidades relativas ao manuseio do diagrama e proposições verdadeiras previamente admitidas. Demonstrações canônicas são detalhadas de acordo com os princípios de uma teoria. São argumentos que, em tese, se destinam a uma audiência que ainda não demonstra ter um domínio profundo da disciplina, ora porque ainda carece de treinamento para conseguir reconstituir, por conta própria, um diagrama a partir das entradas textuais, e, então, inferir exclusivamente os atributos co-exatos exibidos, ora porque, estando nos estágios iniciais da educação (um leigo em matemática, por assim dizer), não tem um repertório amplo o suficiente de proposições matemáticas verdadeiras.

Lassalle Casanave esclarece, com efeito, que “uma prova formal em sentido sintático não pode ser entimemática por definição”. Se a finalidade da análise lógica é expor a forma de um argumento, então ela vai falhar se suprimir propositalmente alguma fórmula. “Por outro lado”, continua ele, “que as provas [euclidianas] sejam entimemáticas não implica que não se possa reconhecer uma forma padronizada de prova que seja a canônica, i.e., que consista no detalhe da prova entimemática”[240].

Uma vez que se sabe que a prática matemática envolve o uso de entimemas, e que é possível ter convicção através deles, a missão da análise retórica passa a ser investigar as habilidades e proposições já conhecidas que permitem ao matemático dar uma prova abreviada ao invés da versão canônica.

O sucesso do método axiomático cristalizou no século XX uma concepção de análise segundo a qual demonstrações são derivações de fórmulas, resultando num gradativo

[240] Lassalle Casanave, *Por construção de conceitos*, 2019, p. 114.

desinteresse pela prática matemática ordinária e os vários métodos inferenciais através dos quais teoremas são demonstrados, dentre os quais as demonstrações heterogêneas de Euclides. O estudo da prática matemática euclidiana revelou, porém, um uso controlado dos diagramas, de maneira que propriedades exatas nunca são justificadas nos *Elementos* a partir da parte visual. Com isso, abriu-se uma oportunidade de investigar uma outra concepção de análise, que permitisse articular demonstrações heterogêneas informais. Daí a importância da retórica clássica.

Pode-se estudar a demonstração matemática desde duas perspectivas. Por um lado, como uma investigação lógica acerca dos fundamentos do conhecimento matemático. Nesse caso, a finalidade pode ser eminentemente matemática ou metamatemática — como desenvolver um sistema formal e, dentro dele, poder provar os teoremas de uma determinada teoria matemática e buscar novos teoremas — ou filosófica, onde o que interessa é compreender e explicitar os mecanismos envolvidos no raciocínio matemático. De outro lado, seguindo a sugestão de Lassalle Casanave & Panza, a justificativa matemática pode ser pensada como espaço possível de argumentação dentro de um sistema razoavelmente claro de autorizações na qual se desenvolve uma prática matemática[241].

4.5. Demonstrações completas e abreviadas

Argumentos retóricos devem ser eficientes. Essa eficiência se deve à capacidade de adaptação aos diferentes tipos de audiência. A análise retórica de Lassalle Casanave & Panza pretende ampliar esse entendimento para as demonstrações parcialmente baseadas em diagramas de Euclides sob a égide da teoria dos entimemas. Para explicar como alguém manipula os diagramas e extrai daí afirmações legítimas, é preciso também considerar o tipo de conhecimento comum que é (ou seria) exigido no contexto dessa prática. A abordagem retórica aqui considerada visa ao estudo da demonstração como um conceito epistemológico e não apenas lógico.

Os entimemas fazem parte da comunicação científica e, por extensão, da matemática, mas essa função comunicativa não é a única a ser considerada. Argumentos entimemáticos são adaptáveis ao conhecimento da audiência, mas são válidos. Por outro lado, tem escapado à literatura a possibilidade de se considerar argumentos entimemáticos baseados

---

[241] Lassalle Casanave, A. & Panza, M., Pruebas entimemáticas y pruebas canónicas en la geometría plana de Euclides. *Revista Latinoamericana de Filosofía* 41, no. 2, 2015, p. 8.

em diagramas. Por exemplo, autores como Pólya[242] e Fallis[243] lembram que as lacunas lógicas são, a despeito das críticas de Frege, bem frequentes nos raciocínios matemáticos. Trata-se de uma prática aceitável deixar de explicitar determinadas premissas e operações a depender do público ao qual se destinava o argumento. Fallis vai além ao tratar das "lacunas entimemáticas" (terminologia dele) como tipos de lacunas intencionais. Essas lacunas entimemáticas, ainda de acordo com Fallis, são aquelas onde o matemático pode "deixar de fora" por considerar que sua audiência a conhece. Seu argumento, que estranhamente deixa de mencionar Aristóteles, é que um matemático pode optar por deixar lacunas inferenciais por questões de economia argumentativa — manter o texto enxuto e conciso. Com um número apropriado de informação, o matemático pode dar o suficiente para a audiência reconstruir seu raciocínio na sua inteireza[244].

Por outro lado, embora Fallis considere que a matemática pode usar entimemas e que esses argumentos constituem uma prática aceitável, ele não discute se se poderia ampliar a própria ideia de argumentos para contemplar o uso de diagramas e habilidades, como propõem Lassalle Casanave & Panza. A concepção de demonstração de Fallis não parece reconhecer que uma versão completa do argumento, correspondente ao preenchimento das "lacunas entimemáticas", também envolve o recurso aos diagramas. Essa limitação é visível em autores como Polya e Anglin, como é possível concluir a partir dos seus exemplos. Daí a afirmação de que argumentos abreviados, entimemáticos ou não, são imperfeitos.

Um entimema pode ser pensado como argumento imperfeito em dois sentidos. Pode-se pensar que é imperfeito porque "faltam premissas". Mas aí dever-se-ia considerar se não foi a audiência que mudou. Circunstancialmente, um argumento válido pode não ser aceito por uma audiência se alguma das premissas que o orador não verbaliza, por considerar óbvia é, apesar de verdadeira, polêmica ou pouco clara; pela mesma razão, um argumento inválido, mas suficientemente detalhado, pode ser aceito por uma audiência. Pode-se pensar, por outro lado, que entimemas são imperfeitos porque são dedutivamente inválidos. Mas, como se viu, esse não é o caso. Portanto, ainda que se possa entender os entimemas como argumentos linguisticamente imperfeitos, porque nem toda premissa precisa ser explicitada, isso não significa que são dedutivamente imperfeitos, se por imperfeitos se entende que não preservam verdade.

---

[242] Pólya, *How To Solve It*: *A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton: Princeton University Press, 1957, pp. 215-220.

[243] Fallis, "Intentional Gaps in Mathematical Proofs." *Synthese* 134, no. 1, 2003, pp. 54-56.

[244] Tanto Pólya quanto Copi consideram que deveria haver uma regra que determinasse que o orador deveria ser bem claro quando fosse usar tais argumentos, o que é uma descaracterização da definição de entimema, pois, em situações corriqueiras, não é preciso explicitar uma proposição já aceita por todos.

Vale destacar por aqui as investigações empíricas de Andersen[245] e Andersen, Johansen & Sørensen[246], que tentaram estudar melhor as observações de autores como Fallis, citado por eles. Recentemente, eles conduziram uma série de entrevistas com matemáticos profissionais com o objetivo de identificar os critérios adotados na hora de aceitar trabalhos acadêmicos contendo esquemas ou descrições de demonstrações, i.e., demonstrações "com lacunas". As observações endossam as conclusões teóricas até aqui consideradas. De um modo geral, os entrevistados dizem que quase nunca procedem a partir da estaca zero, e, portanto, não se detêm sobre todos os passos das demonstrações. Para um outro grupo, é mais importante procurar nas demonstrações os erros, não os acertos. Uns consideram apenas se as ferramentas adotadas são suficientes para alcançar a conclusão almejada, se é preciso acrescentar algo, ou se, ao contrário, pode-se demonstrar, com as mesmas ferramentas, uma proposição mais relevante.

A pesquisa desses autores é uma importante contribuição para um melhor entendimento sobre como o conhecimento científico, na prática, depende da colaboração de vários pesquisadores e perspectivas, ainda que não tenham, individualmente, os mesmos objetivos epistemológicos. Por exemplo, um matemático que aceita de boa-fé uma demonstração esquemática e vai atrás de possíveis erros traz à tona a ideia de credibilidade, algo necessário na ciência, um tema que não chega a ser explorado por Andersen e Andersen, Johansen & Sørensen. Ressalte-se que a pesquisa desses autores também não contempla os argumentos matemáticos diagramáticos, o que seria uma boa oportunidade de avaliar o impacto da definição *standard* sobre o afazer ordinário de um matemático.

Uma curiosidade da pesquisa de Andersen é que um dos entrevistados até mesmo revela que costuma ignorar demonstrações que apresentam algum pequeno erro nos cálculos, desde que seja facilmente corrigível e não comprometa o resultado almejado. Essa fala exemplifica uma observação antecipada por Chateaubriand:

> Não é uma experiência incomum em matemática que um teorema (verdadeiro) seja publicado pela primeira vez com uma demonstração falaciosa. Às vezes leva muito tempo, até décadas, antes que a "demonstração" seja "acertada". Às vezes, é claro, o teorema não é "totalmente verdadeiro" e também deve ser corrigido. Isso significa que não apenas a demonstração "correta", mas também a demonstração falaciosa é uma parte importante da metodologia da matemática? Por que não? A conjectura e o palpite não fazem parte da metodologia da matemática?[247]

[245] Andersen, L. E. "Acceptable gaps in mathematical proofs." *Synthese* 197, no. 1 (2020): 233-247.
[246] Andersen, L. E., Johansen, M. W. & Sørensen, H. K. "Mathematicians writing for mathematicians". *Synthese* 198 (2021): 6233–6250.
[247] Chateaubriand, *Op. cit.,* p. 324.

Deve-se notar que Chateaubriand não está defendendo que o conhecimento matemático deveria incorporar falácias ou que estes argumentos são mais desejáveis do que argumentos corretos. O que é proposto é que mesmo um argumento falacioso pode ser iluminador e talvez até chamar atenção para novas técnicas demonstrativas ou mesmo questionar métodos inferenciais sobre os quais havia se estabelecido algum consenso. O que deve ser sublinhado da passagem supracitada é que um argumento puramente linguístico (formal ou não) não está imune ao erro.

À guisa de exemplo, atente-se para o uso dos postulados 1-3. Intérpretes têm censurado Euclides por ter vacilado em explicitar a unicidade da reta no Postulado 1, o que é pressuposto em outras demonstrações[248]. Para a análise lógica decorrente da axiomatização de Hilbert, pode-se proceder da seguinte maneira. Quando é dito que seja traçado um segmento de reta de um ponto a outro, dever-se-ia entender o seguinte princípio: existe e é única a reta determinada por qualquer par de pontos. As construções geométricas, portanto, passam a ser proposições existenciais. Ocorre que o sistema axiomático de Hilbert não pretendeu esclarecer o método inferencial euclidiano. Percebe-se isso, por exemplo, no fato do sistema de Hilbert não contemplar axiomas equivalentes ao Postulado 2 e 3. Essa axiomatização, portanto, não contribui para uma explicação historiográfica satisfatória dos *Elementos*, tampouco elucida a estabilidade da teoria euclidiana.

Não há dúvidas de que formalizações como a de Avigad, Dean & Mumma podem ajudar a elucidar os mecanismos lógicos por detrás de argumentos informais, sejam eles baseados em diagramas ou não. Não se trata duma disjunção exclusiva entre lógica e retórica. Podem ser ambas. Ainda assim, vale notar uma discrepância em relação ao Postulado 2. O Postulado 2 impõe um obstáculo à ideia de unicidade da seguinte maneira. Em I.2, assim como na maioria das vezes, Euclides prolonga um segmento retilíneo para, então, traçar um círculo que vai cortar o referido segmento. Ocorre que a entrada textual não assegura que na saída diagramática isso vai acontecer. A linha desenhada pode não ser "longa o suficiente". Isso não é devidamente resolvido pela formalização de Avigad, Dean & Mumma. Na verdade, nem o sistema de Hilbert nem o de Avigad, Dean & Mumma contemplam um princípio equivalente ao Postulado 2. A razão para isso é que esses autores possuem uma concepção infinitista das retas, de maneira que a presença de um princípio que autorize a construção de prolongações passa a ser redundante[249].

---

[248] Essa é uma questão já discutida por Proclus, que sugere uma mesma interpretação para o Postulado 3. Ver Proclus, *In Euclidis,* p. 240. Ver também Heath em Euclides *The Thirteen Books of the Elements,* p. 316.

[249] Avigad, Dean and Mumma, A Formal System for Euclid's *Elements*. *The Review for Symbolic Logic* 2, no. 4 (2009): 41, 51. Vide Lassalle Casanave, *Por construção de conceitos,* Rio de Janeiro, 2019, p. 102-103. John

Dada a cooperação texto-diagrama, a entrada textual de cada um desses princípios deve ser acompanhada por uma saída gráfica. Pode-se concluir que a univocidade aí presumida, do ponto de vista da prática matemática, é garantida pelo diagrama. Se se compreende que o Postulado 2 está ligado ao desenho do diagrama, então se compreende um dos porquês de seu "sumiço" nas reconstruções lógicas. Pode-se pensar, ao contrário, que o Postulado 2 tem como papel epistemológico garantir um maior controle sobre a aparência dos diagramas. Assim, a importância do Postulado 2 residiria na hipótese de que pode se tratar de um procedimento chancelado pela audiência. Um procedimento entimemático, portanto. Ou seja, uma prolongação arbitrária é compatível com as autorizações da prática matemática euclidiana[250]. Portanto, em vez de suprimi-lo, como Avigad, Dean & Mumma, dever-se-ia reconhecer as restrições impostas pelos artefatos gráficos.

Marco Panza, que discutiu o tema, propôs a seguinte interpretação para o Postulado 2 de Euclides:

> se um segmento é dado e uma linha física, que o representa, pode ser continuada até cortar uma outra linha física, que representa outro segmento, ou círculo dado, então o primeiro segmento pode ser prolongado até cortar esse outro segmento ou círculo dados[251].

Nota-se destarte que uma das possíveis conclusões da análise retórica é que a formulação canônica do Postulado 2 pode resultar num predicado co-exato ou exato (mandersianamente falando). Se, da sua aplicação, segue-se uma intersecção entre retas, como em I.2, então o resultado é um co-exato. Se, porém, a prolongação vai até a fronteira dalguma figura ou circunferência dum círculo, então o resultado é um exato, pois será igual a um raio traçado pelo Postulado 3.

O método axiomático hilbertiano contribuiu para colocar a análise lógica no centro do debate sobre o conhecimento matemático no século XX. Do ponto de vista da filosofia da matemática, porém, esse entendimento pode dar lugar a uma leitura anacrônica de métodos inferenciais pré-hilbertianos, como o de Euclides, que contempla o uso dos

---

Mumma reconhece que a introdução de retas infinitas estava mais em conformidade com a matemática contemporânea, baseada na teoria dos conjuntos, do que com o método inferencial euclidiano, no qual há uma predileção por segmentos retilíneos (limitados, portanto). Diz ele: "Uma forma de remover essa assunção seria modificar [o sistema formal] E de tal modo que suas variáveis de linha pudessem ser entendidas como referindo-se a segmentos de linhas delimitados em lugar de linhas infinitas. Uma versão de E nesses termos seria mais fiel ao que se pode realmente ver quando se raciocina com um diagrama. A escolha de tomar linhas infinitas como primitivas foi feita por uma questão de conveniência formal". Ver John Mumma, Diagramas e entimemas. In, Gisele Dalva Secco, Frank Thomas Sautter, Oscar Miguel Esquisabel & Wagner Sanz (Orgs.), *De Mathematicae atque Philosophicae Elegantia: Notas Festivas para Abel Lassalle Casanave*, Londres, 2021, p. 131.

250 Ver Lassalle Casanave e Panza, "Pruebas entimemáticas y pruebas canónicas en la geometría plana de Euclides." *Revista Latinoamericana de Filosofía* 41, no. 2, 2015, pp. 14-22.

251 Panza, Panza, M. "The twofold role of diagrams in Euclid's plane geometry." *Synthese* 186, no. 1, 2012, p. 89.

diagramas. O estudo da prática matemática euclidiana revelou, porém, um uso controlado dos diagramas, de maneira que propriedades exatas nunca são justificadas nos *Elementos* a partir da parte visual. Com isso, abriu-se uma oportunidade de investigar uma outra concepção de análise, que permitisse articular demonstrações diagramáticas informais. Daí a importância da retórica clássica.

A equiparação da justificativa matemática a derivações de fórmulas perde de vista que demonstrações pertencem ao rol de questões epistemológicas. Com isso, perde-se uma boa oportunidade de reflexão sobre os vários métodos através dos quais um teorema é estabelecido. Espera-se que uma demonstração não só seja válida, como também promova convicção. Uma vez que se sabe que a prática matemática envolve o uso de entimemas, e que é possível ter convicção através deles, a missão da análise retórica passa a ser investigar as habilidades e proposições já conhecidas que permitem ao matemático dar uma demonstração abreviada ao invés da versão canônica. O que a análise retórica faz é introduzir uma alternativa de demonstração canônica — uma na qual as inferências entimemáticas euclidianas são explicadas sem precisar dispensar o recurso aos diagramas.

4.6. Retórica e matemática na Antiguidade: evidências documentais

Uma das principais teses defendidas por Aristóteles é que a retórica é um tipo de arte, mais precisamente, uma arte do discurso (τέχνη λόγον). Aristóteles classifica o conhecimento em *teórico*, *prático* e *produtivo*[252]. As artes pertencem à classe do conhecimento produtivo. Toda arte envolve um conjunto de regras e princípios extraídos da experiência que não só regulam a produção de algum tipo de trabalho, ou seja, possui um fim, como também pode ser ensinada, envolvendo, portanto, o raciocínio reto[253], embora não se possa esperar do conhecimento artístico o mesmo rigor das ciências teóricas[254].

Essa classificação do conhecimento se reflete na edição crítica das obras aristotélicas de August Immanuel Bekker e na maneira como vários intérpretes de Aristóteles

---

[252] Ver, por exemplo, Aristóteles, *Tópicos*, 145a15–16; *Metafísica*, VI.1, 1025b20-25 e 1026a18–19; XI.7, 1064a10–19, b1–3; *Ética nicomaquéia*, VI.2, 1139a26–28; VI.8,1141b29–32.

[253] Aristóteles, *Ética nicomaquéia*, VI.4, 1140a. Sobre esse sentido de τέχνη, ver Cope, *An introduction to Aristotle's Rhetoric,* Londres, 1867, p. 22-23, 71-74; Grimaldi, *Aristotle, Rhetoric I-II: A Commentary*, New York, 1980, p. 4-6.

[254] Ver Aristóteles, *Ética nicomaquéia*, I.3,1094b20-25.

costumam associar retórica e crítica literária. Dentre os defensores dessa linha interpretativa estão David Ross, Joseph Moreau e G. E. R. Lloyd. Ross chama a *Retórica* de uma "curiosa confusão" de crítica literária misturada com uma "lógica de baixa qualidade" (leia-se os entimemas), ética, política e jurisprudência sem nenhum objetivo teórico à vista, a não ser ensinar "como brincar com a fraqueza do coração humano"[255]. Moreau, por sua vez, reconhece que a retórica aristotélica pressupõe um núcleo argumentativo dos discursos, mas que esta disciplina não seria interessante, posto que não estabelece conclusões rigorosamente necessárias de certeza científica ("conclusions rigoureusement nécessaires et d'une certitude scientifique")[256]. O parecer de Lloyd é negativo e lacônico. Segundo ele, a *Retórica* ensina como vencer disputas verbais mediante o uso de recursos discursivos que enganam os oponentes ou a audiência. "Esses recursos", continua Lloyd, "incluem argumentos persuasivos, mas não estritamente válidos, e apelo às emoções da audiência"[257].

De fato, o Livro III da *Retórica* contém um estudo do estilo, o qual contempla a produção dos três gêneros de discurso — jurídico, deliberativo e epidítico — e dos poemas. Não é inteiramente descabida a aproximação da retórica à crítica literária. Também é verdade que a retórica precisa considerar como o discurso se relaciona com as emoções da audiência e o caráter do orador, como se vê no Livro II. Porém, o uso da retórica para enganar e manipular as emoções da audiência, como sugerem os autores acima, representa a antítese do que vem a propor Aristóteles como sua contribuição mais original, a saber, a centralidade dos entimemas. Apesar da referência ao texto de Aristóteles, a análise retórica de Lassalle Casanave & Panza não pretende reivindicar uma interpretação fiel do *corpus aristotelicum* quanto ao estatuto científico dos entimemas, tampouco faz considerações sobre as interações entre os *Elementos* a retórica clássica desde um ponto de vista historiográfico. Entretanto, esta possibilidade poderia ensejar alguns comentários pontuais acerca de novos argumentos ou evidências (documentais) que poderiam ser incorporados a esta proposta.

Viu-se no Capítulo 2 que as demonstrações de Euclides destoam do modelo aristotélico no tocante ao papel epistemológico dos diagramas. Essa diferença não é suficiente para negar quaisquer similaridades entre os *Elementos* e os *Analíticos*, mas pode sugerir que o objetivo de Aristóteles não era apresentar uma descrição da maneira como o geômetra demonstrava seus teoremas. Pode-se pensar, desde uma perspectiva diferente, que Aristóteles pretendia tratar dos requisitos lógicos e epistemológicos que um argumento *deveria* satisfazer

---

255 Ross, *Aristotle*, Londres, 1923, p. 270-276.
256 Moreau, *Aristote et son école*, Paris, 1962, p. 248-251.
257 Lloyd, *Aristotle: the growth and structure of his thought*, Cambridge, 1968, p. 272-273.

para ser considerado uma demonstração. Por outro lado, Jonathan Barnes argumenta que Aristóteles não pretendia regular a prática científica de sua época, senão oferecer uma "explicação formal" sobre como o conhecimento já obtido deveria ser representado e ensinado. Ou seja, o objetivo principal da ciência demonstrativa seria o ensino[258].

Não disputamos a tese Barnes, mas a consideramos *cum granus salis* quando se trata de uma interpretação dos objetivos de Aristóteles. Seja como for, o mérito de sua tese reside no fato de não se propor uma projeção dos *Analíticos* sobre o conhecimento produzido por matemáticos contemporâneos de Euclides, como costumeiramente se faz. Agora, por que não pensar na retórica como um tipo de codificação do modo de apresentação do conhecimento matemático?

A retórica se desenvolveu na Grécia durante o século V a.C. como disciplina autônoma destinada a sistematizar as várias táticas e estilos argumentativos. Evidências documentais apontam para a produção de discursos jurídicos durante esse período como um importante momento para o desenvolvimento da retórica. Em *Das refutações sofísticas,* Aristóteles esclarece que a arte retórica era uma disciplina há muito estudada, mas não de maneira sistemática, pois ela consistia apenas na memorização de discursos e no dar e responder perguntas[259].

As disputas na Grécia Antiga eram resolvidas de dois modos: por meio de um acordo entre os litigantes ou por meio de um julgamento. Caso a tentativa de acordo fracassasse, tinha início o processo litigioso. O primeiro estágio era a convocação (πρόσκλησις, *proslkesis*) dos litigantes. O segundo estágio era o *exame* (ἀνάκρισις, *anakrisis*). Esse estágio começa com os juramentos dos litigantes perante um magistrado: a acusação

[258] Jonathan Barnes, Aristotle's theory of demonstration. In Jonathan Barnes, Malcolm Schofield & Richard Sorabji, *Articles on Aristotle. I. Science,* Duckworth, 1975, p. 85. Uma interpretação parecida é oferecida por Francis Wolff, Ciência aristotélica e matemática euclidiana. *Analytica: Revista de Filosofia,* v. 8, n. 1, p. 43-88, 2004.

[259] Aristóteles compara a retórica, sobre a qual já existiam estudos, e a silogística, cujos princípios e métodos foram descobertos por ele. Dentre aqueles que se dedicaram ao estudo da retórica, Aristóteles menciona Tísias, Trasímaco, Teodoro, Górgias e Alcidamas. Ver Aristóteles, *Refutações sofísticas*, XXXIV, 183a25-184. Tísias, Teodoro e Górgias são mencionados por Platão como predecessores da retórica em *Fedro*, 267a. Cícero menciona Corax e Tísias como os primeiros teóricos dessa arte. Ele também afirma haver uma relação direta entre o estabelecimento da democracia na Grécia e a origem da retórica. Com o fim da tirania, tornava-se premente ao cidadão grego manifestar-se publicamente, sobretudo em litígios, cujo número aumentaria no período. Ver Cícero, *De inventione*, II.2.6; *Brutus*, XI.44-XIII.51; *De oratore*, II.38.160. Sobre a história da retórica antiga, ver Quintiliano, *Institutio oratoria*, Livro III; Plutarco, *Vida dos dez oradores*. Vale notar que na poesia de Homero o poder do discurso, muitas vezes comparado e equiparado ao poder militar, é um tema constante. Veja-se, por exemplo, *Ilíada*, I.248 e XX.248-250. Os discursos de Odisseu eram tão imponentes que distraiam a audiência de sua fisionomia (III.212-224); Aquiles foi treinado por Fênix para ser um excelente orador (IX, 443); os homens distorcem a justiça nas assembleias (XVI.384-93); o domínio da guerra é a força e o das assembleias, a palavra (XVI.630-31). Cenas dos líderes discutindo e deliberando em assembleias são muito comuns: I.54-305; II.50-398; IV.1; VII.345-420; VIII.2-41, 489; IX.10-181; X.195-254, 300-331; XVIII.244-313; XIX.45.

deveria jurar está procedendo de boa-fé ao abrir o processo, ao passo que o acusado deveria declarar-se inocente[260]. Durante o exame eram apresentados documentos e testemunhas de ambos os lados, as quais também poderiam ser objetadas por ambos os lados. Poder-se-ia também questionar a competência da corte ou do magistrado para tratar daquele caso[261]. Portanto, o exame era um estágio técnico.

Quando havia alguma disputa litigiosa, esperava-se que os litigantes representassem a si mesmos durante o julgamento. Exceções eram os casos envolvendo agentes da Polis ou os de grande repercussão[262]. A acusação e o réu deveriam apresentar discursos com a mesma duração, o que exigia um equilíbrio entre a concisão e a persuasão. Daí a importância dos logógrafos (λογόγραφος)[263], i.e., os escritores de discursos. Quem procurava esses profissionais desejava uma única coisa: vencer o litígio. Os discursos produzidos e comercializados pelos logógrafos deveriam contemplar táticas úteis a quem não tinha habilidades oratórias, mas também, e esse provavelmente era o objetivo principal, dispor a audiência a favor de um dos lados, independentemente de sua causa ser justa. Uma vez redigido, o discurso era então memorizado. Essa prática era comum nos séculos V e IV, a.C. Como observa Todd, os julgamentos dependiam muito mais da oratória do que das evidências e documentos. "Num julgamento ateniense, as testemunhas são relativamente insignificantes e tudo depende do discurso. É o discurso que conta a história, não as testemunhas; e é o mesmo discurso que contém argumentos jurídicos e apelos emocionais"[264].

Os manuais de retórica antes de Aristóteles discriminavam três momentos do discurso. Em primeiro lugar, falavam na invenção (εὕρεσις; *inventio*): quais os recursos disponíveis e aceitáveis àquele que busca persuadir uma audiência. Confissão sob tortura, por exemplo, não era aceita como evidência testemunhal. Em segundo lugar, a organização (τάξις; *dispositio*): qual ordem um discurso deve seguir. Pois independente de ser oral ou escrito, diz Aristóteles, demonstrar uma coisa implica a existência do que será demonstrado; e expor previamente um assunto tem por objetivo a demonstração. Por fim, fala-se também no estilo (λέξις; *elocutio*): como o discurso deve ser apresentado, sendo mais importante ao discurso

---

260 Uma das cenas mais antigas a esse respeito está em Homero, *Ilíada*, XVIII.497-508.
261 Ver Aristóteles, *Constituição dos atenienses*, §53 e §§63-69, Tradução, introdução e notas de Delfim Ferreira Leão, Lisboa, 2003. Do mesmo período, veja-se a peça *Epitrepontes*, do poeta Menandro.
262 Para essas breves considerações sobre o direito grego, consultamos os seguintes textos: Harrison, *The Law of Athens*, 2 vols., Oxford, 1968-71; Todd, *The shape of athenian law*, Oxford, 1993, p. 91-92.
263 Os principais oradores áticos exerceram a função de logógrafo. Esses oradores eram Antifonte, Lísias, Isócrates, Iseus, Demóstenes, Licurgo, Hipérides, e Dinarco (ou Dinarchus). Muito do que se sabe sobre eles foi preservado por Plutarco no ensaio *Vida dos dez oradores*.
264 Todd, *The shape of athenian law*, Oxford, 1993, p. 130.

escrito[265]. Os poetas teriam sido os primeiros a se interessar pelo estilo[266]. Aristóteles também menciona a *pronunciação*, que envolve controle da voz e gesticulação[267]. Nos manuais latinos aparece também a *memória*, que ensejaria o desenvolvimento de técnicas mnemônicas.

Ainda de acordo com Aristóteles, os manuais de retórica identificavam quatro partes na organização: proêmio (προοίμιον), narração (διήγησις), prova (πίστις), conclusão ou epílogo (ἐπίλογος)[268]. A organização dos discursos já era algo estudado desde a época de Isócrates[269] e Platão[270]. O proêmio marca o início do discurso e o caminho a ser percorrido. Sua função é análoga ao prólogo, na poesia, e ao prelúdio, na música[271]. O proêmio serve também para antecipar a finalidade do discurso e evitar que a audiência fique dispersa[272]. A narração explica um estado de coisas em virtude de acontecimentos passados. Por isso mesmo, diz Aristóteles, pertence ao gênero jurídico, porque ninguém pode estabelecer uma narrativa sobre fatos futuros[273]. Na prova, o orador deve manifestar-se em favor de sua tese principal, antecipando-se também às objeções. É aqui onde devem aparecer os entimemas e os paradigmas — os primeiros mais apropriados ao discurso jurídico e os segundos, ao deliberativo[274]. É, portanto, o cerne do discurso. "As provas por persuasão também devem ser demonstrativas" (τὰς δὲ πίστεις δεῖ ἀποδεικτικὰς εἶναι). O epílogo é o fim do discurso e deveria servir a um dos seguintes propósitos. Tornar a audiência favorável à causa do orador e rejeitar a tese contrária; amplificar (as ações ou discurso do orador) ou minimizar (as ações ou discurso do adversário); dispor a audiência para um comportamento emocional; recapitular.

265 Aristóteles, Retórica, III.2, 1414a. Aristóteles fala destas questões pela primeira vez no Livro I da Retórica, em 1354b, para então dar-lhe total atenção no Livro III.

266 Aristóteles, *Retórica*, III.1.

267 A pronunciação (*pronuntiatio* ou *actio*) é o uso da voz — volume, harmonia e rítmo — e dos gestos corporais. Por exemplo, levantar a voz e bater na mesa para mostrar indignação. Esse tema, segundo o próprio Aristóteles, apareceu antes na poética — ainda que tardiamente — em razão do uso de atores. Ou seja, como os autores não podiam mais encenar suas peças (porque exigia vários personagens, por exemplo), fazia-se necessário ensinar aos atores quais emoções deveriam ser representadas, quais gestos seriam mais condizentes com tais emoções, etc. Aristóteles fala que a pronunciação tem o mesmo efeito que a atuação e que Trasímaco escreveu sobre esses assuntos. Talvez isso explique porque Platão o retrata como um bufão performático no Livro I da *República*. De fato, Aristóteles atribui aos poetas o desenvolvimento inicial do estilo, apontando Górgias como alguém que adotava um perfil mais poético.

268 Em latim, essas partes são traduzidas da seguinte maneira: *exordium* (proêmio), *narratio* (narração), *probatio* (prova), *peroratio* (conclusão ou epílogo). Ver Cícero, *De oratore*, I.141-143 e *De inventione*, I.XIV.19; *Rhetorica ad Herennium*, I.4; Dionísio de Halicarnasso, *Lysias*, 15-34; Diógenes Laércio (VII.43); Quintiliano, *Institutio Oratoria*, III.9.1-5. Ver também Lausberg, *Elementos de retórica literária*, Lisboa, 1972, p. 91-93.

269 Isócrates (*Contra os Sofistas*, seção 16).

270 Platão, *Fedro*, 266d–267d. São identificadas as seguintes partes: proêmio (προοίμιον), narração (διήγησίν), testemunho (μαρτυρίας), prova (τεκμήρια), argumentos prováveis (εἰκότα), confirmação (πίστωσιν) e recapitulação (ἐπάνοδος).

271 Píndaro chama προοιμίου (proêmio) a parte inicial dos poemas (ver *Nemeia*, II.1-5; *Pítias*, I.4). Nesse sentido, a invocação às musas nos poemas de Homero e Hesíodo, por exemplo, pertencem a essa parte do discurso. Vide também Aristófanes, *Cavaleiros*, 1343.

272 Aristóteles, Retórica, III.14, 1415a.

273 Aristóteles, Retórica, III.15, 1417b.

274 Aristóteles, Retórica, 1418a.

Pode-se recorrer a mais de um desses elementos num mesmo epílogo. “O início do epílogo, por isso, enuncia que se cumpriu o que se prometera, de tal forma que se há de expor o que foi tratado e porquê”[275].

Como visto no Capítulo 2, as demonstrações euclidianas têm um estilo de argumentação que se mantém estável durante a maior parte dos *Elementos*. Os padrões desse estilo são encontrados também em outros matemáticos da Antiguidade. Em primeiro lugar, uma proposição é enunciada (*protasis*); depois, um diagrama é exibido (*ekthesis*); em seguida, apresenta-se a especificação (*diorismos*). Na sequência, tem-se a construção (*kataskeuē*) dalguns entes geométricos, onde na maioria das vezes verifica-se inferências diagramáticas, e a demonstração (*apodeixis*) dos atributos exatos requeridos. Por fim, Euclides faz uma breve recapitulação (*symperasma*).

Do que foi discutido até agora, é possível propor uma analogia entre a organização dos discursos retóricos e a organização dos *Elementos*. A respeito da organização, mais especificamente, o proêmio corresponderia ao enunciado, à exibição e à determinação. É onde fica dito qual caminho deverá ser seguido. A narração corresponderia então à construção. É onde reconstitui-se os passos que resultaram no diagrama presente. E o que é chamado prova corresponde à demonstração, onde também encontram-se os entimemas. Por fim, o epílogo é a conclusão, onde a prova é recapitulada, exatamente como diz Aristóteles, sem, contudo, haver referência ao caráter ou emoções do orador ou audiência.

4.7. Retórica e história da matemática

A análise retórica de Lassalle Casanave & Panza, bem entendida, propõe também uma espécie de reconstrução racional de teorias informais através duma depuração dos meios legítimos de se expor uma demonstração, quer seja canônica, quer seja entimemática. Não havendo, portanto, nenhum prejuízo no que diz respeito à correção formal dum argumento retórico, é justo pensar que o recurso aos artefatos gráficos serve, a princípio, como um meio legítimo de aquisição de conhecimento. Dentre os méritos dessa análise está o fato de provocar novas reflexões sobre métodos alternativos de estudo do conhecimento matemático. Ou seja, a filosofia não se resume a ser uma investigação lógica acerca dos fundamentos do conhecimento matemático, cuja finalidade seria desenvolver um sistema formal e, dentro dele, poder provar os teoremas de uma determinada teoria matemática e buscar novos teoremas.

[275]Aristóteles, Retórica, III.19, 1419b.

Paralelamente ao texto de Lassalle Casanave & Panza, Gérard Émile Grimberg também reivindicou uma interpretação retórica da geometria. Grimberg reconhece, de um lado, que os diagramas são meios legítimos de justificação matemática ao mesmo tempo em que observa, de outro lado, como somente relações topológicas são dependentes do artefato gráfico[276]. Em seu estudo, Grimberg não menciona a dicotomia entre exatos e co-exatos de Manders e com isto acaba por ignorar a dimensão normativa das provas euclidianas. Seu argumento carece, portanto, duma importante categoria analítica no que diz respeito à maneira como os diagramas devem ser empregados ao longo duma demonstração. Isso não quer dizer que suas conclusões sejam equivocadas, senão que estão expostas às costumeiras críticas dentro da literatura filosófica. Poder-se-ia objetar que as operações com diagramas estão baseadas em regras elusivas e, por isto, inferiores em relação às regras dentro dum sistema formal. É imperativo ao argumento de Grimberg mostrar como um sujeito não poderia inferir falaciosamente uma afirmação a partir do diagrama.

Por outro lado, Grimberg incorpora dentre suas referências em retórica Cícero e Quintiliano sem oferecer uma ponte mais sólida entre estes autores e as demonstrações matemáticas. Dentro de sua análise, Grimberg acaba por transferir o protagonismo da audiência para o orador ao destacar a maneira como a performance deste — em gestos, mímica, ênfase, movimento de surpresa afetada e mesmo demonstrações de paixão — facilitaria a assimilação duma demonstração[277]. Ora, é difícil perceber como estas performances poderiam surtir algum efeito sem considerar o papel decisivo da audiência na percepção e aceitação deste mesmo orador. Dito de outra maneira, o desempenho do orador deve adequar-se à audiência por ele escolhida. Ademais, não é esclarecido como uma demonstração sob tais condições seria válida e ainda assim dependente do orador. Grimberg poderia servir-se aqui dos entimemas aristotélicos como forma de reforçar esta dimensão retórica das demonstrações euclidianas.

Outrossim Grimberg fala duma possível analogia entre as etapas da demonstração euclidiana e o cânone retórico, como acima proposto. O problema, porém, é que ao inserir Cícero e Quintiliano em sua análise, Grimberg acaba por ignorar a distância entre o modelo de arte retórica aristotélico, próximo ao tempo de Euclides, e aquele em voga no tempo destes autores. Grimberg argumenta, por exemplo, que uma aproximação entre as demonstrações euclidianas e a retórica seria através da valorização da memória, fato que está de acordo com

---

[276] Grimberg, O estatuto do diagrama nos *Elementos* de Euclides, *Revista Brasileira de História da Ciência*, v. 8, n. 1, p. 6-21, 2015.
[277] Grimberg, O estatuto do diagrama nos *Elementos* de Euclides, *Revista Brasileira de História da Ciência*, v. 8, n. 1, 2015, p. 14.

as categorias da retórica latina nos séculos I a.C. e II d.C., mas não pertence à classificação vista em Aristóteles.

A respeito de uma interpretação retórica das demonstrações euclidianas, convém destacar que há precedentes nos séculos XVI e XVII. De fato, Giovanna Cioletti já havia destacado o fato de alguns matemáticos durante esse período terem tentando aproximar a retórica da álgebra. Para alguns matemáticos radicados na França, como Petrus Ramus, Jacques Peletier e Guillaume Gosselin, a retórica era mais do que uma teoria da argumentação baseada na persuasão; ela também poderia regular uma prática matemática através da formulação dalgumas técnicas[278].

Além de ter sido um prolífico divulgador do conhecimento matemático, Peletier também publicou uma tradução dos Livros I-VI dos *Elementos*, vindo a se envolver em algumas polêmicas concernentes ao método da sobreposição usado por Euclides, o que provocou uma réplica de Cristóvão Clávio. O ambicioso projeto de reforma do ensino de Peletier tinha a retórica como um dos pilares e abrangia todas as disciplinas até então ensinadas. No caso da matemática, diz Peletier, elas são mais difíceis do que outras disciplinas ("si sont elles tousiours difficiles quelques peu, au regard des autres professions"), tanto pelo modo de apresentação quanto pela extensão de suas demonstrações[279]. "Entre os homens de erudição, tem sido amplamente debatido, e a controvérsia ainda não foi resolvida, qual dos dois é mais benéfico para o cultivo das disciplinas: quando os professores as escrevem, tratá-las de forma clara e detalhada, ou de maneira obscura e concisa"[280] De sua parte, porém, Peletier diz existir um caminho intermediário que contempla brevidade e clareza:

> Eu optei por seguir um caminho intermediário. Após examinar cuidadosamente o mérito dos dois [lados] opostos, concluo que não é impossível ser claro e conciso ao mesmo tempo, desde que se mantenha fiel ao método, que é o que confere majestade às escritas e não a obscuridade[281].

---

[278] Cifoletti, *Mathematics and Rhetorics: Peletier and Gosselin and the making of the French algebraic tradition*, Tese (Doutorado), Princeton, 1992, p. 21.
[279] Peletier, *Arithmetique*, 1549, f.XXVIII.
[280] Peletier, *Arithmetique,* 1549, f. XXXVI: "Entre les hommes d'érudition, a été longuement debattu, et n'est encore le différend vidé, lequel des deux est le plus profitable pour l'entretenement des disciplines, que les professeurs d'icelles, quand ils les mettent par écrit, les traitent clairement et au long, ou bien obscurement et brief".
[281] *Ibdem*: "J'ai pris opinion de suivre un chemin mitoien. Car après avoir bien examiné le mérite des deux contraires, je trouve qu'il n'est pas impossible d'être facile et brief tout ensemble, pourvu qu'on tiegne toujours son adresse à la méthode, qui est celle qui donne majesté aux écrits, et non l'obscurité.

O pensamento deve ser expresso de maneira clara, quer seja na poesia, quer seja na prosa científica. “A primeira e mais importante virtude do poema é a claridade”, diz Peletier, em alusão à mesma frase dita por Quintiliano: *Nobis prima sit virtus perspicuitas*[282].

Ao mencionar o problema do método, Peletier argumenta que, apesar dos usos da aritmética, sua aplicação é retardada pelo fato de seus inventores considerarem mais agradável dispor cada novo resultado como lhes vêm à mente, sem com isso se adequar a uma ordem[283]. Peletier volta a se manifestar sobre a necessidade de um método para as ciências matemáticas em *Dialogue de l'Ortografe et Prononciation Françoese*, publicado em 1550. Diz ele:

> As matemáticas nunca estiveram em melhor ordem do que estão agora, nem em uma disposição mais favorável para serem compreendidas em sua perfeição. E, como a verdade delas é manifesta, infalível e constante, imagine que imortalidade [as matemáticas] poderiam conferir a uma língua se fossem redigidas em um bom e verdadeiro método[284].

À continuação dessas reflexões, no Capítulo IV de *L'Art poëtique*, publicado em 1555, Peletier mostra de que maneira a retórica poderia ser aplicada a todos os tipos de discursos. Todos os tipos de escritos, diz ele, são compostos por três partes principais: invenção, disposição e eloquência (Toutes sortes d'Écrits s’accomplissent de trois parties principales, qui sont Invention, Disposition, Élocution). Deve-se incluir aí também os escritos científicos em geral e os matemáticos, em particular. A invenção, ainda segundo ele, é um plano originado na mente para alcançar determinado objetivo; a disposição, por sua vez, é a ordenação e a transmissão, através do ensino, dessas coisas inventadas; a eloquência, por fim, é uma estrutura de palavras e cláusulas umas com as outras, vindo a expor as concepções da mente e que serve como intermediário para as duas anteriores.

No prefácio de *L’Algèbre*, de 1554, Peletier questiona: Que mérito tem um homem em entender ou falar uma língua, se não souber ajustar as palavras e vesti-las habilmente de acordo com seu ponto e necessidade? (Quelle louange appartient-il à un homme pour entendre ni pour parler une langue, s'il ne sait accomoder les mots, et les

[282] Peletier, "La première et la plus digne vertu du poème est la clarté”. A importância da clareza na exposição das demonstrações matemáticas também é tema de Petrus Ramus. Vide Livros II e III de *Scholae mathematicae* (1569).
[283] Peletier, *L’Aritmetique*, 78v: Toutefois il est bien vraisemblable, que combien qu’ils entendissent beaucoup d’usages de l’Arithme tique, si est ce qu’il ne leur e tait pas aise d’en mettre promptement la pratique par art: Carla plus agre able et coutumieÁre voie que tiennent les Inventeurs, n’est pasde coucher chaque article en son propre lieu, ni en ordre me thodique, mais seulement ainsi qu’ils leur viennent en l’esprit ().
[284] Peletier, *Dialogue de l'Ortografe et Prononciation Françoese*, 1550, p. 117: “Nos mathématiques ne furent jamais mieux au net, qu'elles sont de présent, ni en plus belle disposition d'être entendues en leur perfection. Et par ce que leur vérité est manifeste, infallible et constante, pensez quelle immortalité elles [les mathématiques] pourraient porter à une langue, y étant rédigées en bonne et vraie méthode”.

accoutrer artificiellement à son point et à son besoin?) Para ajustar a língua às suas necessidades, continua Peletier, o homem precisará de discernimento; e para ter discernimento, precisará de ordenação, i.e., disposição. O papel da álgebra seria precisamente o de conferir ao raciocínio matemático um tipo de ordenação, de maneira a tornar as matemáticas mais claras e fáceis. A álgebra estaria para as matemáticas assim como a disposição para a retórica. Diz Peletier:

> A álgebra é uma arte de contar perfeitamente e precisamente, e de resolver todas as questões aritméticas e geométricas de possível solução por números racionais e irracionais. Sua grande singularidade reside na invenção de todos os tipos de linhas e superfícies, onde a ajuda dos números racionais nos falta. Ela ensina a raciocinar e a buscar todos os pontos necessários para resolver uma dificuldade, mostrando que não há coisa tão difícil que a mente não possa alcançar, desde que considere bem os meios que a ela se aplicam[285].

A álgebra, diz Peletier ainda no texto de 1554, exige a indústria da imaginação, de modo a aguçar a mente e a impedir de se tornar pesada e cansada[286]. É através dessa influência da retórica que Peletier enxerga a originalidade de sua álgebra em comparação com os predecessores, nomeadamente, Girolamo Cardano (1501 - 1576) e Michael Stifel (1486 - 1567). E conclui:

> De Cardano, eu diria que ele enriqueceu a álgebra com belas invenções, acompanhadas de demonstrações buscadas laboriosamente, mas um tanto confusas e muito obscuras. Quanto a Stifel, eu diria que ele se esforçou ao máximo para reduzir a arte à sua simplicidade, e nisso, fez mais do que qualquer outro antes dele. No entanto, ele falou um pouco excessivamente nos lugares fáceis e de maneira um tanto escassa nos lugares difíceis. Em resumo, eu diria de todos em conjunto que tiveram pouca consideração pela método e ordem[287].

Ao criticar os tratados matemáticos de sua época, Peletier chamava atenção para novas considerações a respeito do método das ciências exatas. Mas o que lhe interessava acima de tudo não era uma nova lógica, ou até mesmo uma teoria da demonstração, senão

[285] Peletier, *L'Algèbre,* 1554, f. 1: "L'algèbre est un art de parfaitement et précisément nombrer: et de soudre toutes questions Arithmétiques et Géométriques de possible solution par nombres Rationnaux et Irrationnaux. La grande singularité d'elle, consiste en l'invention de toutes sortes de lignes et superfices, où l'aide des nombres rationnaux nous défaut. Elle apprend à discourir, et a chercher tous les points nécessaires pour résoudre une difficulté: et montre qu'il n'est chose tant ardue, à laquelle l'esprit ne puisse atteindre, avisant bien les moyens qui y adressent".

[286] Peletier, *L'Algèbre,* 1554, f. 5.

[287] De Cardan je dirais qu'il a enrichi l'algèbre de belles inventions, avec Démonstrations laborieusement cherchées, mais un peu confusément, et très obscurément. De Stifel, je dirais que bien il a mis toute la peine qu'il a pu, de reduire l'art en sa simplicité: et en cela, a plus fait que nul autre auparavant lui. Mais il a un peu trop amplement parlé es endroits faciles, et trop chichement es difficiles. En somme, je dirais de tous ensemble, qu'ils ont eu peu d'égard à la méthode et ordonnance.

uma *retórica da demonstração*[288]. Percebe-se isso na versão dos *Elementos* que Peletier traduziu em 1557. Para Peletier, uma demonstração é, tal como a tradição aristotélica, um silogismo. No entanto, deve-se notar as similaridades entre o geômetra e o orador no tocante ao modo de apresentação de seus argumentos, mais especificamente, como em ambos os casos não é necessário explicitar a forma lógica dos argumentos:

> Se alguém indaga curiosamente por que, na demonstração das proposições, não se revela a forma do silogismo, mas apenas alguns membros concisos do silogismo, saiba que seria contrário à dignidade da ciência se, ao tratá-la com seriedade, fosse necessário seguir palavra por palavra as fórmulas ensinadas nas escolas. Pois, quando um advogado vai ao tribunal, ele não recita o que o professor de retórica lhe ditou, mas estuda o máximo que pode, mesmo que se valha dos preceitos de retórica para deixar claro que ele está longe de pensar apenas em retórica[289].

Dessa maneira, Peletier conclui:

> Assim, na obra geométrica, visto que não buscamos nada além de alcançar precisamente o objetivo que desejamos, ocultamos completamente a figura do silogismo. No entanto, se alguém quisesse investigar, essa figura poderia ser expressa vividamente nas provas geométricas[290].

Ao comentar a álgebra retórica de Peletier, Ciffoleti não se atentou para a possível conexão entre essa concepção de demonstração matemática e os entimemas dos quais falava Aristóteles. E Peletier não foi o primeiro, nem mesmo o último, a insinuar tal possibilidade.

4.8. Observações finais

Durante os séculos XIX e XX as demonstrações euclidianas foram criticadas por causa da presença de inferências extraídas dos diagramas. Essas críticas foram ratificadas pela

---

[288] Ver Cifoletti, *Mathematics and Rhetorics: Peletier and Gosselin and the making of the French algebraic tradition*, 1992, p. 213.

[289] Que si quelqu'un recherche curieusement, pourquoi en la démonstration des propositions ne se fait voir la forme du syllogisme, mais seulement y apparoissent quelques membres concis du syllogisme, que celui là sache, que ce seroit contre la dignité de la science, si quand on la traite à bon escient, il falloit suivre ric à ric les formules observées aux écoles. Car l'Advocat, quand il va au barreau, il ne met pas sur ses doigts ce que le Professeur en Rhétorique lui a dicté: mais il s'étudie tant qu'il peut, encore qu'il soit fort bien recours des preceptes de Rhétorique, de faire entendre qu'il ne pense rien moins qu'à la rhétorique.

[290] Ainsi, en l'oeuvre géométrique, veu que nous ne cherchons rien autre sinon d'atteindre justement au but que nous désirons nous dissimulons entièrement la figure du syllogisme. Laquelle toutefois si on voulait rechercher, elle se pourroit exprimer au vif des preuves Géométriques.

identificação entre justificação matemática e derivação de fórmulas (a definição *standard*). Nas primeiras décadas deste século, porém, tal entendimento foi contestado a partir da reavaliação do papel demonstrativo dos diagramas no contexto da prática matemática.

Este Capítulo apresentou uma defesa das demonstrações diagramáticas euclidianas desde o ponto de vista da retórica. Viu-se com Manders que a prática matemática supostamente engendrada pelos *Elementos* é estável porque o uso dos diagramas nas demonstrações euclidianas é controlado, não permitindo que afirmações exatas sejam indevidamente inferidas do artefato gráfico. Essa é a dimensão normativa do conhecimento matemático dos *Elementos*. Discutiu-se, em seguida, se essa dimensão normativa, relativamente ao uso dos diagramas, poderia ser explicada a partir da noção de entimemas tal como proposta por Lassalle Casanave & Panza. Por fim, considerou-se a possibilidade de uma concepção de demonstração canônica que contemplasse os diagramas. Indo além da proposta original de Lassalle Casanave & Panza, consideramos aqui também algumas evidências sobre uma possível ligação entre retórica e matemática na Grécia Antiga (séculos V e IV, a.C.). Por fim, apontamos para um importante precedente na Modernidade a respeito de uma interpretação retórica da matemática. Nos próximos capítulos procuraremos explicar de que maneira a retórica passou a ser considerada uma alternativa metodológica na matemática; como isso ajuda a esclarecer o papel demonstrativo dos diagramas nos *Elementos*, bem como a relação entre lógica e matemática sob o ponto de vista do modelo clássico de ciência. Será interessante indagar também para que essa linha interpretativa tenha caído no esquecimento.

5. Lógica e matemática: a polêmica em torno das demonstrações euclidianas no século XVI

5.1. Resumo do capítulo

Apresentamos a análise retórica de Lassalle Casanave & Panza no Capítulo 4 como um tipo de reconstrução da prática matemática engendrada pelos *Elementos*. Em comparação à doutrina aristotélica da ciência demonstrativa, sobre a qual falamos no Capítulo 2, e ao método axiomático-formal hilbertiano, exposto no Capítulo 3, a retórica tem a vantagem de preservar o caráter heterogêneo das demonstrações euclidianas sem negligenciar de sua correção formal. Mas, essa não foi a primeira vez que a retórica foi alçada ao patamar de alternativa ao método lógico. De fato, nos séculos XVI e XVII vários comentadores da obra euclidiana assumiram as categorias da retórica clássica como forma de explicar, e até mesmo defender, o estilo euclidiano, posto que, *prima facie*, as demonstrações euclidianas não adotam a forma típica dos silogismos. Neste Capítulo, mostramos como a aproximação entre retórica e matemática está vinculada a dois episódios críticos do pensamento aristotélico relativamente às matemáticas: a rejeição sistemática da silogística e a *quaestio de certitudine mathematicarum*.

5.2. Introdução

No início da Modernidade o conhecimento matemático na Europa esteve circunscrito aos *Elementos* de Euclides e o *De sphaera*, de João de Sacrobosco. Isso começou a mudar na segunda metade do século XIV. Graças ao mecenato da elite italiana, nobres como o duque Federico da Montefeltro de Urbino (1422 - 1482) e o banqueiro Cosimo De' Medici, aliado a intelectuais como Giorgio Valla e Federico Commandino, vários manuscritos contendo a ciência matemática grega foram reunidos nas grandes bibliotecas da Itália. O renascimento da matemática colocou à disposição desses eruditos várias versões do texto euclidiano. A primeira missão desses intelectuais seria filológica: determinar qual versão é mais fiel a Euclides. Para tanto, foi necessário recorrer a Proclus. Apesar da boa recepção nos centros universitários, além de ser lido por humanistas famosos, a influência de Proclus foi muito negativa para o *status quo* escolástico-aristotélico quanto à explicação do conhecimento matemático.

Nos *Analíticos posteriores*, Aristóteles afirma que o conhecimento científico parte de primeiros princípios e procede dedutivamente através de silogismos científicos. Viu-se que Aristóteles seguidamente usa as matemáticas como exemplo de conhecimento científico e que os *Elementos*, no que toca aos primeiros princípios, satisfaz as condições estabelecidas. O mesmo não pode ser dito em relação às demonstrações. A razão para isso, além do fato de Euclides não proceder silogisticamente, como já foi dito, é que o conhecimento demonstrativo é conhecimento das causas.

As conexões entre lógica e matemática datam do Helenismo tardio, quando Alexandre de Afrodísias, Proclus e Filopono sugeriram que as demonstrações euclidianas poderiam satisfazer *algumas* das exigências lógicas e epistemológicas dos *Analíticos posteriores*. Quer isso dizer, primariamente, que as demonstrações euclidianas seriam causais e poderiam ser tratadas silogisticamente. Quando, então, os textos de Proclus e Filopono chegaram à Europa no final do século XV, os intelectuais da época acabariam por justificar, a partir destes, duas teses antagônicas: de um lado os que entendiam ser incompatíveis a demonstração causal e o raciocínio matemático; do outro, os que insistiam em dizer que os argumentos de Euclides eram causais[291]. Estas disputas constituem a Questão sobre a certeza matemática (*Quaestio de certitudine mathematicarum*). A *Quaestio* tem origem nos recém-descobertos comentários de Proclus, o qual contestou a tese dos peripatéticos de que as matemáticas apresentadas nos *Elementos* estavam em conformidade com o modelo científico apresentado nos *Analíticos posteriores*.

Os argumentos deste capítulo encontram-se distribuídos da seguinte maneira. A seção 5.2, logo abaixo, expõe a conexão entre o conceito de causalidade e as demonstrações euclidianas à luz dos textos de Aristóteles e sua recepção em Proclus. A seção 5.3 apresenta as várias críticas feitas à silogística no século XVI. A seção 5.4, mostra o impacto do texto

---

[291] Sobre a recepção de Proclus nos séculos XV e XVI, ver Gilbert, *Renaissance Concepts of Method*. New York: Columbia University Press, 1960, p. 87-88; L Maierú, La diffusione di Proclus, commentatore di Euclide, nel Cinquecento. 11 *Annuario del Liceo Scientifico*, Cosenza, 1999, 49-68; Helbing M.O., La fortune des Commentaires de Proclus sur le premier livre des Eléments d'Euclide à l'époque de Galilée, In Bechtle G. & O'Meara D.J. (eds.), *La philosophie des mathématiques de l'Antiquité tardive*, Actes du colloque international, 2000; Chikara Sasaki, *Descartes's mathematical thought, Netherlands*, 2003, p. 333-342; Stephen Gersh (ed.), *Interpreting Proclus: From antiquity to the Renaissance*, Cambridge, 2014; Adamson, Peter, & Filip Karfík, Proclus' legacy. In Pieter d'Hoine & Marije Martijn (eds.), *All from one: a guide to Proclus*, Oxford, 2017; V. J. De Garay, The Reception of Proclus: From Byzantium to the West (an Overview). *Byzantine Perspectives on Neoplatonism,* De Gruyter, p. 153-173, 2017; Guy Claessens, Proclus in the Renaissance. In: Marco Sgarbi (ed.), *Encyclopedia of Renaissance Philosophy*. Springer, 2022; Álvaro José Campillo Bo. The Forgotten Gifts of Hermes: The Latin Reception of Proclus' Commentary on Euclid's *Elements*. *Mediterranea. International Journal on the Transfer of Knowledge*, v. 8, p. 193-278, 2023.

procliano sobre Alessandro Piccolomini, responsável por provocar a *quaestio de certitudine mathematicarum* em 1547. Ressaltamos que o objetivo principal de Piccolomini não era rejeitar por completo a possibilidade de haver conhecimento demonstrativo nas ciências matemáticas. A seção 5.5 expõe a reação de Cristóvão Clávio às teses de Piccolomini. Essa resposta, que não ataca diretamente Piccolomini, esteve inserida num contexto mais amplo de disputa sobre o lugar das matemáticas no currículo pedagógico da Sociedade de Jesus. Esse comedimento desaparece no texto de Biancani, sobre o qual falamos na seção 5.6 Para além da réplica a Piccolomini, Biancani é o primeiro filósofo, até onde sabemos, a declarar que os argumentos matemáticos em geral procedem por entimemas, embora a inspiração dessa declaração possa ter sido antecipada por Clávio. Como será mostrado no próximo capítulo, esse entendimento de que os argumentos matemáticos são entimemáticos estará presente em Isaac Barrow e Alfonso Borelli.

5.3. Demonstração e causalidade

Viu-se que nos *Analíticos posteriores* Aristóteles estabeleceu critérios lógicos e epistemológicos para os primeiros princípios da ciência demonstrativa. Dentre esses critérios está a causalidade desses princípios em relação às conclusões inferidas a partir deles. Em outras palavras, ter conhecimento demonstrativo de uma proposição significa saber a sua causa. Dizer, portanto, se os argumentos matemáticos em geral, e os de Euclides, em particular, se adequam ou não às exigências de Aristóteles é ser capaz de mostrar que eles são causais.

Embora Aristóteles tenha dito que o saber científico é um saber etiológico, i.e., um saber concernente às causas[292], esse conceito só vai ser discutido na *Física* e na *Metafísica*[293], respectivamente. Diz ele que a causa pode ser entendida de quatro maneiras. É a conhecida teoria das quatro causas. A primeira causa, tradicionalmente chamada *formal*, diz respeito à substância e corresponde, por isso, à definição. A segunda causa é a *material* e corresponde àquilo de que é feito algo. A terceira é a causa *eficiente* (ou *motriz*) e diz respeito à origem do movimento. Por fim, a causa *final*, que diz respeito ao movimento. Ora, assumindo que os objetos matemáticos não são determinados pela matéria nem estão em movimento, a única causa possível nas matemáticas é a formal, logo, definicionais.

[292] Aristóteles, *Analíticos posteriores*, I.2, I.24, 85b23; *Física*, II.3.
[293] Aristóteles, *Física* (II.3, 194b16-195b32) e na *Metafísica* (I.3-7 e V.2). Aristóteles discute no Livro II dos *Analíticos posteriores* de que maneira as demonstrações devem expressar a causa.

De volta aos *Analíticos posteriores*, Aristóteles diferencia dois tipos de argumentos causais. O conhecimento *do que* é (τὸ ὅτι ἐπίστασθαι, *tò óti epistasthai*) e o conhecimento do *porquê* (τὸ διότι ἐπίστασθαι, *tò dióti epistasthai*)[294]. Essa nova divisão corresponde a tipos de raciocínio demonstrativo, conhecidos desde o século XIII nas expressões latinas *demonstratio quia* e *demonstratio propter quid*. A *demonstratio quia*, mediante a qual se obtém conhecimento do que é, ou seja, daquilo que existe, é a inferência da causa oculta *a partir* de seu efeito mais próximo e conhecido. Por exemplo, concluir que choveu por causa do chão molhado. A *demonstratio propter quid*, por meio da qual se chega ao conhecimento do porquê, vai na direção inversa do raciocínio acima, i.e., parte das causas para chegar a seus efeitos. Por exemplo, se há chuva sobre uma superfície, então esta ficará molhada. Do exposto acima pode-se dizer que (ao menos) no contexto dos *Analíticos posteriores* a geometria é reconhecida como uma ciência demonstrativa baseada em argumentos causais e que a finalidade de uma filosofia da ciência seria expressar essa relação causal, posto que nem sempre isso acontece na argumentação ordinária.

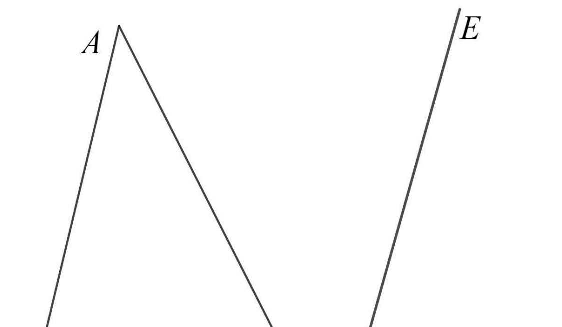

Figura 10: diagrama correspondente à Proposição 32 do Livro I dos *Elementos*

Consideremos o teorema I.32 dos *Elementos* (Figura 1). Eis como Euclides procede. Do triângulo *ABC* dado, um de seus lados, o *BC*, é prolongado mediante o Postulado

[294] Aristóteles, *Analíticos posteriores,* I.13, 78a23-24. À dicotomia entre conhecimento do quê e conhecimento do porquê corresponde a divisão entre as ciências subalternas (ou mistas), nas quais se conhece o fato, e as subalternizantes, nas quais se obtém o conhecimento do porquê, como a ótica e a mecânica em relação à geometria e a harmônica em relação à aritmética. Esses são exemplos usados por Aristóteles, o qual acrescenta no mesmo parágrafo que estas últimas, *i.e.,* as ciências matemáticas, apresentam demonstrações explicativas, facultando-se ao matemático o conhecimento do fato (vide Aristóteles, *Analíticos posteriores*, I.13, 79a3-7).

2 até *CD*, formando então o ângulo externo *ACD*. A partir daqui demonstra-se, depois de ter sido erguida a paralela *CE* (Teorema 31), que os ângulos alternos *BAC* e *ACE* são iguais, o mesmo valendo para os ângulos *ABC* e *ECD*, que são opostos. Somando-se, pois, os ângulos *BAC* e *ABC* ao *ACB*, ver-se-á que são iguais ao *ACD* junto ao *ACB*. E como a linha reta *EC*, após ter sido erguida sobre a *BD*, fez seus ângulos adjacentes iguais, segue-se que estes ou são dois ângulos retos, ou são iguais a dois retos; portanto, os ângulos do triângulo *ABC*, tomados conjuntamente, são iguais a dois retos.

Como já discutido, a prática matemática euclidiana destoa desse ideal por causa do uso sistemático dos diagramas. Além disso, o modo de apresentação das demonstrações em geral, e as de Euclides em particular, não adota a forma típica do silogismo, razão pela qual se poderia pensar que a teoria aristotélica acerca do conhecimento é inadequada ou, o que é mais comum, que as demonstrações euclidianas carecem de um tratamento mais rigoroso. Ora, não há indícios nos *Analíticos posteriores* de que as disciplinas científicas da época observassem integralmente a teoria ali desenvolvida. Pode-se conjecturar daí, como já indicamos, que Aristóteles não estava descrevendo as ciências conhecidas tal e qual eram praticadas — ou pelo menos que esse não tenha sido o objetivo principal —, senão que estava propondo um modelo de análise filosófica. Poder-se-ia pensar, sob o risco de anacronismo, que os *Analíticos posteriores* engendram uma concepção primitiva de reconstrução racional. Dentre as razões para tanto está a exigência de que os silogismos científicos precisam expressar uma relação causal entre os princípios e a conclusão.

No Prólogo II do *Comentário ao Livro I dos Elementos*, Proclus tenta reforçar a importância filosófica da geometria euclidiana ao lembrar que seu autor, Euclides, incluíra ali silogismos de todos os tipos (*syllogismȏn trópous pantoîos*): alguns a partir das causas (*apò tȏn aitíōn*), outros, a partir de sinais (*apò techmēríōn*); todos, porém, de inquestionável exatidão e apropriados à ciência[295]. Proclus faz uso do jargão aristotélico. E por isso mesmo o comentador acaba levantando uma tremenda confusão quando, logo em seguida, faz esta

---

[295] Proclus, *In Euclidis*, 69.8-10: έτι δε τοις των συλλογισμών παντοίους τρόπους, τους μεν από των αιτίων λαμβάνοντας την πίστιν , τους δε από τεκμηρίων ωρμημένους, πάντας δε ανελέγκτους και ακριβείς και προς επιστήμης οικείους. Morrow traduz da seguinte maneira: "He also included reasonings of all sorts, both proofs founded on causes and proofs based on signs, but all of them impeccable, exact and appropriate to science". Embora a expressão των συλλογισμών possa ser traduzida como "os raciocínios", como prefere Morrow, ou "os silogismos", o contexto da distinção feita por Proclus sugere que ele usou o termo em sua acepção técnica da lógica aristotélica. Além disso, a inclusão do termo "*proofs*" corresponde a uma expressão que não aparece na passagem de Proclus (i.e, ἀπόδειξις). Compare-se com a tradução de Francesco Barozzi (1560, p. 40): "Adhuc autē *omnis generis syllogismorū modos*, alios quidē a causis fidem suscipientes, alios vero a certis notis profectos; omnes autem inuincibiles et certos, ad scientiamque accommodatos". Compare-se também com a tradução de Thomas Taylor: "Besides this, he exhibits *modes of syllogisms of every kind*; some, indeed, receiving credibility from causes, but others proceeding from certain signs; but all of them invincible and sure, and accommodated to science".

afirmação: “Muitas pessoas pensaram que a geometria não investiga a causa, ou seja, não faz perguntas do tipo “por que?” Amphinomus é dessa opinião, embora Aristóteles a tenha originado”[296]. Ora, viu-se há pouco que, sob a perspectiva da ciência demonstrativa, as demonstrações matemáticas *devem ser* causais. A confusão continua, pois agora Proclus chama atenção para a relevância da análise filosófica ante o fato de nem sempre o matemático explicitar relações causais:

> É verdade que, quando o silogismo usa redução ao absurdo, os geômetras ficam satisfeitos em simplesmente descobrir um atributo; e, de novo, quando eles usam uma demonstração prévia para provar uma determinada conclusão, a causa não é evidente. Mas, se a conclusão é universal e se aplica a casos parecidos, o porquê-é fica manifesto[297].

A suposta incompatibilidade entre Aristóteles e Euclides é usada por Proclus em desfavor do primeiro, favorecendo indiretamente Platão. Algumas vezes, diz Proclus, os argumentos matemáticos, como os de Euclides, têm sim as propriedades duma demonstração em sentido aristotélico ao estabelecerem o que é buscado por meio de definições como termos médios. Mas isso não vale irrestritamente, de maneira que o uso de construções auxiliares indicaria que os argumentos geométricos não se adequam à doutrina aristotélica. Diz ele:

> Perceberemos algumas vezes que o que é chamado “demonstração” tem a propriedade duma demonstração por ser capaz de estabelecer o que é buscado por meio de definições como termos médios e esta é a forma perfeita de demonstração; às vezes, porém, tenta provar por meio de sinais. Isso não deve ser ignorado. Embora as proposições geométricas sempre derivem sua necessidade a partir da matéria sob investigação, *nem sempre alcançam seus resultados através de meios demonstrativos*. Por exemplo: quando, a partir do fato de o ângulo exterior de um triângulo ser igual a dois ângulos retos, como isso pode ser chamada uma demonstração baseada na causa? Não é o termo médio usado aqui apenas um sinal? Porque mesmo que não haja ângulo exterior algum, os ângulos internos são iguais a dois retos; pois se trata de um triângulo, ainda que seu lado não tenha sido prolongado. Contudo, quando demonstramos que o triângulo construído pelo desenhar dos círculos é equilátero, nossa abordagem é a partir da causa. E isso pela razão de podermos asserir que é a similaridade e igualdade dos círculos que causam a igualdade dos lados do triângulo[298].

Em outras palavras, não é porque foi construído o ângulo *AED* que o triângulo tem a soma

[296] Proclus, *In Euclidis*, 202.9-11. Proclus não está reproduzindo um relato de Aristóteles sobre pessoas que negaram o caráter causal do raciocínio matemático, senão que está *atribuindo* a Aristóteles essa tese. (Ainda que seja possível dizer que Proclus reproduz um relato de Aristóteles, uma tal passagem não se encontra em seus textos sobreviventes.)
[297] Proclus, *In Euclidis*, 202.19-25.
[298] Proclus, *In Euclidis*, 206.12-207.3.

dos seus ângulos iguais a dois retos, senão que é porque *ABC* é um triângulo que seus ângulos são iguais a dois retos. A diferença entre ambas as frases é que só a segunda expressa uma relação causal *propter quid*. Agora, que os argumentos matemáticos nem sempre estejam em conformidade total com os silogismos científicos é algo antecipado por Aristóteles e é até mesmo mencionado por Proclus. Portanto, a não adequação dessa construção euclidiana não deveria ser tão importante, uma vez que a explicitação daquela relação causal deveria ser uma das funções da ciência demonstrativa, não da geometria.

Talvez se possa levar em consideração o que Filopono declarou sobre o mesmo assunto, haja vista a maneira como ele busca estabelecer diálogos com Proclus, que o precedeu. De acordo com Filopono, no comentário à passagem 78a22 dos *Analíticos posteriores*, uma demonstração a partir de sinais nada mais seria do que uma demonstração *quia*, i.e., o conhecimento da causa a partir do seu efeito[299]. Portanto, as demonstrações matemáticas partem da causa para os efeitos e podem seguir no caminho inverso, a partir dos efeitos para as causas, tomando-se aqueles como evidência para estas.

Aristóteles trata dos argumentos através de sinais (*apò techmēríōn,* ἀπὸ τεχμηρίων) em duas ocasiões e em ambas as vezes ele está falando dos entimemas[300]. As premissas dos entimemas são necessárias ou frequentes[301], de maneira que os entimemas são também de dois tipos: os necessários, ou por sinais (ἐξ σημείων), e os prováveis (ἐξ εἰκότων). Um sinal, por sua vez, é aquilo que coexiste com outra coisa, antes ou depois da referida coisa ter ocorrido, que indica que a coisa aconteceu. O sinal pode ter três posições, tal como o termo médio do silogismo científico. Quando o sinal é necessário, chama-se *tekmérion* (τεκμήριον)[302].

Como se viu, as tentativas de encaixar as demonstrações euclidianas naquelas categorias aristotélicas datam pelo menos do século III d.C. com Alexandre de Afrodísias, Proclus e Filopono. No caso específico de Proclus, que pertencia ao séquito platônico, ao contrário de Alexandre, embora ele tenha sido um dos primeiros intérpretes a propor uma linha de continuidade traçada entre Aristóteles e Euclides, sua defesa da adequação dos argumentos deste último aos ditames do primeiro mostra-se ambígua e até mesmo hesitante. Como dissemos no Capítulo 2, a terminologia de Proclus é confusa quando se trata de analisar

---

[299] Adotamos o texto editado por Maximilian Wallies. Ver Filopono, *In Aristotelis analytica posteriora commentaria cum Anonymo in librum ii*, Berolini, 1909, p. 168.23-25.

[300] Aristóteles, *Primeiros analíticos*, II.27, 70b; *Retórica,* I, 2, 1357b4 e II, 25, 1402b19.

[301] Ora, só há conhecimento científico do que geralmente é (ou seja, é frequente) ou do que sempre é (ou seja, é necessário). Logo, as premissas serão também frequentes ou necessárias. Ver Aristóteles, *Analíticos posteriores*, I.30, 87b19-28.

[302] Não há um termo específico para quando não é necessário, de modo que se pode optar pela transliteração *anónymon semeîon*.

os argumentos euclidianos. Algumas expressões parecem ter sido tiradas da dialética aristotélica, mas aplicadas ao contexto matemático. Proclus nunca fala em entimemas, tampouco sugere que os *Elementos* poderia ser lido à luz da *Retórica*, ainda que seja certo que ele conhecia aquele texto. E é precisamente essa ambiguidade que vai provocar uma reviravolta no debate sobre o estatuto científico das matemáticas no contexto dos séculos XVI e XVII.

5.4. As críticas à silogística

O início da Modernidade é marcado por uma abundância de tratados, compêndios e manuais lógicos. Além do *Organon* de Aristóteles, eram estudados nas principais universidades da Europa os manuais de Porfírio (*Isagoge*), Boécio (*De topicis differentiis*) e Pedro Hispânico (*Summulae Logicales*), lógico medieval que viveu no século XIII[303]. A grade curricular relativa à lógica nestes centros acadêmicos permaneceria praticamente inalterada até finais do século XVIII. Não obstante, a historiografia contemporânea costuma ser bastante negativa em relação à qualidade da lógica moderna[304]. Com a notável exceção dos textos de Leibniz e quiçá a *Logique* de Antoine Arnauld & Pierre Nicole, a literatura especializada avalia os demais textos como exposições inferiores das teorias de Aristóteles e dos lógicos medievais, não reconhecendo, por isso, nenhuma contribuição positiva ou original entre os séculos XVI e XIX.

Compreende-se que a qualidade dos manuais de lógica no século XVI ficou aquém do que era produzido pelos medievais por causa de uma rejeição generalizada da silogística desde o século XIV por parte dos humanistas, se bem que as objeções à lógica em geral já não eram novidade nem mesmo na Antiguidade. Na peça de comédia *Filosofias em leilão,* Luciano de Samósata (*ca.* 125 - 190, d.C.) ridiculariza os estóicos pelos usos e abusos dos silogismos. Aliás, que é um silogismo? “Umas teias de palavras, com as quais enredo os meus interlocutores, lhes tapo a boca e os obrigo a calarem-se, aplicando-lhes firmemente uma mordaça”[305].

Dentre os representantes do platonismo tardio, tanto Plotino quanto Proclus dão as mesmas respostas sobre a lógica aristotélica: que é inferior à dialética. Em seu texto *Da*

---

303 Ver Ashworth, *Language and Logic in the Post-medieval Period*, 1974, p. 3.
304 Ver Kneale & Kneale, *The Development of Logic,* New York, 1962, p. 298-300.
305 Luciano de Samósata, *Filosofia em leilão*, Coimbra, 2013, p. 172. Segundo o tradutor, Custódio Magueijo, os manuscritos traziam o nome de Crisipo ao lado do modelo estóico.

dialética (*Eneida* I, 1.3), Plotino diz que a técnica da lógica consiste em estudar proposições e suas combinações, i.e., silogismos (*logikēn pragmateian peri protaseōn kai syllogismōn*). Mas esse estudo, diz Plotino na *Eneida* 5.5.1, é inferior ao da dialética na medida em que consegue abarcar apenas as expressões linguísticas, nunca atingindo aquilo que existe em si. Essa passagem sugere que, para Plotino, a lógica não seria muito diferente das "teias de palavras" sobre as quais Luciano falou com desdém uma geração antes. Convém notar que em ambas as passagens Plotino mistura os jargões aristotélico e estóico, um bom indicativo de que sua crítica abrangia as duas escolas.

Para Proclus, como já observamos, no cerne dos *Elementos* de Euclides está a dialética de Platão, não a silogística de Aristóteles[306]. Em *Theologia platonica*, capítulo IX do Livro I, Proclus também procura estabelecer uma oposição entre, de um lado, a dialética atribuída a Parmênides, que supostamente teria sido passada a Platão, e, do outro lado, as disputas verbais e os exercícios lógicos. Mais uma vez, o que se pretende mostrar é que a lógica é meramente uma ferramenta para estudo gramatical[307]. Por sinal, Proclus vai além do que disseram Luciano e Plotino e até mesmo acusa Aristóteles de imitar o método platônico usado no *Parmênides* quando desenvolveu a silogística[308]. Pode-se especular se essa não terá sido a razão para ele não usar a silogística no comentário aos *Elementos*, embora aplique sistematicamente os esquemas das lógicas peripatética e estóica para estudar os argumentos usados no *Parmênides*.

Os humanistas não chegaram ao cúmulo de dizer que a lógica era falsa, mas consideravam-na desinteressante e menos útil do que a retórica e a dialética[309]. Lorenzo Valla (1407-1457) foi o principal crítico da silogística durante o Renascimento. É dele o texto *Repastinatio dialecticae et philosophiae*, de 1439[310]. Havia também uma desconfiança quanto ao estilo escolástico e um excessivo afastamento da linguagem ordinária, como tão bem François Rabelais conseguiu capturar de forma cômica no personagem Janotus de Bragmardo, um escolástico da Sorbonne que só falava através de chavões aristotélicos e não conseguia juntar duas frases inteligíveis[311].

---

[306] Marinus, biógrafo e aluno de Proclus, confirma que seu mestre conhecia muito bem a obra de Aristóteles, sobretudo os tratados lógicos. Ver Marinus, *Proclus ou Sur le bonheur*, Paris, 2001, capítulos 12-13.
[307] Proclus, *In Platonis Parmenidem*, 1007, 1051.29-1052. Vide a tradução de Glenn R. Morrow & John M. Dillon, *Proclus' Commentary On Plato's Parmenides*, New Jersey, 1987, p. 356.
[308] Proclus, *In Platonis Parmenidem* [135e]. Proclus faz alusão aos *Analíticos posteriores*, I.27.
[309] Ver, por exemplo, Pico della Mirandola. *Examen vanitatis doctrinae gentium et veritatis Christianae disciplinae*, 1520. Especialmente o Livro V.
[310] Sobre as críticas de Valla, ver Lodi Nauta, *In Defense of Common Sense: Lorenzo Valla's Humanist Critique of Scholastic Philosophy*, Harvard University Press, 2009.
[311] Rabelais, *Gargantua* (I, caps. 17-19, II.3, 12) e *Gargantua e Pantagruel* (cap. 48).

O uso da lógica também começava a ser questionado na teologia cristã. Erasmo de Roterdã via como incompatíveis a lógica aristotélica e a exegese cristã. Veja-se, por exemplo, *Elogio da loucura* (1511, LI). Em *Paraphrasis in Marcum,* publicado em 1524, Erasmo compara o jeito simples das parábolas de Jesus, apresentadas a gente pobre e não educada, com os obscuros silogismos dos lógicos e os discursos dos oradores[312]. Também Martinho Lutero, como se sabe, foi crítico veemente de Aristóteles e da escolástica, como nota em um de seus primeiros textos reformistas, a *Disputatio contra scholasticam theologiam*, de 1517 (Teses 39-53). Lutero comumente cita Aristóteles com os adjetivos mais grosseiros possíveis. Com relação à lógica, Lutero cita o dito, repudiado por ele, de que não é possível ser teólogo sem saber a lógica aristotélica[313]. Lutero se referia às *disputationes*, que constituíam requisito parcial para obtenção de graus universitários, inclusive o diploma de teólogo.

Por fim, objetava-se também que a lógica não serviria mais aos propósitos investigativos impostos pela filosofia natural, quer seja como uma ferramenta cognitiva, quer seja como uma teoria do próprio pensamento científico. Montaigne, por exemplo, cita o *De Fortuna Alexandri* de Plutarco para reforçar uma conclusão que não estava no texto, a saber, o estudo da lógica é desnecessário[314]. A suposta irrelevância epistemológica se tornará o principal argumento de Petrus Ramus, Pierre Gassendi[315] e René Descartes. As críticas de Descartes à silogística são bem conhecidas. Por exemplo, na sétima de suas *Regulae ad*

---

312 Erasmo, *Paraphrasis in Marcum*. A passagem bíblica é Marcos 4:2-8. Ver Erasmo, *Paraphrase on Mark*, tradução de Erika Rummel, In Robert D. Sider (Ed.), *Collected Works of Erasmus*, Vol. 49, New Testament Scholarship, University of Toronto Press, 1988, p. 56.

313 Lutero, *Resolutiones disputationum de Indulgentiarum virtute*, Tese 8, §16. In: *Obras selecionadas*, vol. I, p. 86. Tradução: Luís M. Sander. Como era de se esperar, o currículo lógico da Alemanha à época de Lutero seguia a tradição escolástica, sem muita coisa nova além dalguns novos pontos de vista nos comentários a Pedro Hispânico. Seja como for, deve-se mencionar, além de Konrad Wimpina, citado nominalmente por Lutero, Bartholomaeus de Usingen (1465 – 1532) e Jodocus Trutvetter (1460 – 1519) professores de Lutero na Universidade de Wittenberg. Outro importante nome é o de Johann Maier von Eck (1486 – 1543). Lutero e Calvino não deixaram contribuições originais ao estudo da lógica, embora tenham ajudado, mesmo indiretamente, a reavaliar a importância da lógica aristotélica nos currículos universitários. Eis porque causa estranheza Earline Jennifer Ashworth, no livro *Language and Logic in the Post-medieval Period* (1974), mencionar Lutero uma única vez, o que já é mais do que o número de citações a ambos em *The Development of Logic* (1962) do casal William Kneale & Martha Kneale. Ora, não é mero acaso que Philip Melanchthon, colega e colaborador de Lutero em Wittenberg, tenha ido fundamentar sua nova abordagem ao estudo dos argumentos no *De inventione dialectica* de Rodolfo Agrícola (1444 - 1485), crítico moderado de Aristóteles. Como reconhece Ashworth, o texto de Agrícola, publicado postumamente em 1515, tornou-se um *best-seller*, sendo muito apreciado por leitores luteranos, num fenômeno muito parecido com a repercussão de Petrus Ramus entre os calvinistas (Ashworth, 1974, p. 11, 16). O melhor ponto de partida para entender as conexões entre a teologia reformada e a lógica encontra-se em Walter J. Ong, S.J., *Ramus: method, and the decay of dialogue* (1958, XIII, 298-301). De acordo Ong, a Alemanha foi o lugar onde as ideias de Ramus mais prosperaram, mesmo tendo sido banidas da Universidade de Leipzig em 1592. Sua dialética serviu de base para sistemas teológicos, científicos e educacionais. Às vezes seus seguidores misturavam Ramus e Aristóteles ou Ramus e Melanchthon. Suas ideias retornaram à França em 1649, quando foi publicada a *Encyclopaedia* de Johann Heinrich Alsted.

314 Montaigne, *Ensaios*, Livro I, cap. 26: Sobre a educação das crianças.

315 Gassendi, *Exercitationes paradoxicae adversus Aristoteleos.*

directionem ingenii, ele fala em grilhões da silogística[316]; na décima regra, ele é ainda mais duro ao dizer que a silogística só serve para mostrar aquilo que já se sabe[317]. Essa mesma crítica aparece no *Discurso sobre o método*, VI.17.

Os comentadores de Euclides no século XVI foram educados num ambiente humanista de grande apreço pela retórica e repulsa pela lógica. Não seria difícil, portanto, contemplar a possibilidade de usar a retórica como alternativa metodológica à silogística. De fato, esse foi o entendimento de comentadores como Giorgio Valla, Melanchtohn, Petrus Ramus, Peletier. Antes de estudarmos alguns desses autores e a maneira como eles consideravam a relação entre retórica e matemática, convém expor a réplica de Piccolomini aos detratores da lógica aristotélica. Pode-se antecipar, desde já, que Piccolomini não só falhou em seu projeto de reabilitação da lógica como principal instrumento da ciência, em oposição à matemática, como até mesmo alimentou com novos argumentos os opositores de Aristóteles ao ressaltar as incompatibilidades entre lógica e as demonstrações de Euclides.

5.5. *Quaestio de certitudine mathematicarum*

Em 1547, Alessandro Piccolomini (1508 – 1578)[318] publica *In Mechanicas Quaestiones Aristotelis*[319], ao qual anexou um breve texto chamado *Commentarium de certitudine mathematicarum disciplinarum*[320]. Piccolomini se propôs mostrar ali que as matemáticas não satisfazem os requisitos estabelecidos no Livro I dos *Analíticos posteriores*, de modo que essas disciplinas não poderiam ocupar, na hierarquia aristotélica dos saberes, o primeiro lugar no tocante à certeza. O argumento de Piccolomini, apesar de começar com a

[316] Descartes, *Regulae ad directionem ingenii,* AT, X, p. 389; TPD, p. 26.
[317] Descartes, *Regulae ad directionem ingenii,* AT, X, p 406-407.
[318] A Família Piccolomini era muito influente em Siena. Dela saíram dois papas: Enea Silvio Piccolomini (Pio II) e seu sobrinho, Francesco Piccolomini (Pio III). Segundo Bernardino Baldi, em *Cronica de Matematici*, Alessandro se dedicou aos estudos desde muito cedo. Aprendeu latim e grego; estudou retórica, lógica e matemática; traduziu clássicos antigos, como Virgílio. Baldi reconhece que Alessandro não era exímio matemático, não podendo ser equiparado a Regiomontano e Commandino, por exemplo. Ver Bernardino Baldi, *Le Vite De' Matematici* [*Cronica de Matematici*,], edição de Elio Nenci, Milão, 1998, p. 520-539.
[319] Atualmente, a literatura especializada não reconhece esse texto como autêntico. No século XVI poucos questionariam sua autoria. A esse respeito, veja-se Peter Mclaughlin, On the Authenticity and Reception of Aristotle's Mechanical Problems, 2022 (Inédito).
[320] Um dos primeiros a salientar a importância da *quaestio de certitudine mathematicarum* para o estabelecimento da ciência moderna foi Neal Ward Gilbert em *Renaissance Concepts of Method*, Columbia University Press, 1960. De lá para cá, a bibliografia foi se avolumando. Destaque especial para Nicholas Jardine, cujo texto apresenta um resumo da controvérsia sem entrar em detalhes. Ver Jardine, "Epistemology of the Sciences". In Schmitt *et al.*, *The Cambridge history of Renaissance philosophy*, Cambridge University Press, 1988, pp. 685-711. Paolo Mancosu, por sua vez, mostrou que essa controvérsia ecoaria ainda durante o século XVII. Ver Mancosu, *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*, Oxford University Press, 1996. A mais recente contribuição ao tema digna de nota é a Tese de doutoramento de Bernardo Machado Mota, *O estatuto da matemática em Portugal nos séculos XVI e XVII*, Lisboa, 2008.

mesma linha de raciocínio de Proclus, o qual é muito citado, pretendeu estabelecer conclusões opostas no que diz respeito ao papel da lógica na investigação científica em geral. Pois, ao negar que as matemáticas ocupassem o primeiro lugar concernente à certeza, Piccolomini pretendeu subordiná-las à silogística, ao passo que Proclus visava fazer o mesmo com relação à dialética. Essa subordinação, aos olhos de Piccolomini, não retiraria das matemáticas seu caráter científico, tampouco faria de seus resultados incertos e duvidosos. Piccolomini limita-se apenas a defender que, embora o conhecimento matemático seja certo e irrefutável, essa certeza não decorre da *demonstratio potissima*, i.e., do silogismo mais poderoso que corresponderia às demonstrações matemáticas, mas antes de seu objeto e também da lógica.

Piccolomini argumenta que dos quatro gêneros de causa, a matemática seguramente não é compatível nem com a eficiente nem com a final. Em relação à primeira, isso seria manifesto na própria natureza da disciplina, que não admite movimento, senão metaforicamente (*de efficiente nullus dubitat, cum Mathematicus non consyderet motum nisi metaphoricum*), e a causa eficiente é, alegadamente, a transferência do movimento da causa para o seu efeito. Que não se possa admitir a causa final, diz Piccolomini, prova-o Aristóteles, o que se mostraria suficiente para apontar, por cima disso, que embora seja possível tratar como sinônimos "o bem dalguma coisa" e "o fim dalguma coisa", não se segue daí que a geometria procede a partir da causa final por ser um bem respeitante ao conhecimento proporcionado, porque o bem aí considerado é algo externo à disciplina. Em relação à causa material, notar-se-á, mais uma vez segundo as autoridades, que a geometria lida unicamente com a matéria *inteligível* e esta, identificada aqui com a quantidade em geral, só poderia estar na imaginação (*quantitas ipsa est, in phantasia collocata*)[321] . Piccolomini subscreve a tese de Proclus sobre o caráter intermediário dos objetos da matemática — nem são quantidades materiais nem são quantidades de existência independente —, assumindo como *locus* a imaginação (*phantasia*), também uma faculdade intermediária entre a sensibilidade e o intelecto. Diz ele:

> Portanto, Proclus conclui, a partir de Platão, que as próprias coisas matemáticas, sobre as quais são feitas as demonstrações, não são totalmente objetos sensíveis nem completamente libertas destes. Essas figuras matemáticas são encontradas na própria imaginação, embora tenham sua ocasião nas quantidades encontradas na matéria sensível. O intelecto, a partir daquelas coisas que estão na imaginação em quantidades, reúne esses princípios universais[322].

[321] Piccolomini, *In Mechanicas Quaestiones Aristotelis*, 1547, pp. 102v-103r.

[322] Piccolomini, *In mechanicas quaestiones Aristotelis paraphrasis*, Venice: Navo, Curzio Troiano, 1565, p. 95: Concludit ergo proclus ex Platone, quod res ipsae mathematicae, de quibus fiunt demonstrationem, nec omnino in subiecto, sensibiles sunt, nec penitus ab ipso liberatae, sed in ipsa phantasia reperiuntur figurae illae

Restava, portanto, a causa formal. Mas, se este fosse o caso, o termo médio numa demonstração matemática haveria de ser a definição de uma propriedade ou do objeto, como Proclus também argumentou. Isso, contudo, não é compatível com o método inferencial euclidiano, baseado em construções geométricas; de fato, acrescenta Piccolomini,

> (...) tomando todos os teoremas de Euclides, Teodósio, Arquimedes, entre outros exemplos, caso seja examinado com cuidado o já mil vezes referido teorema 32 do Livro I dos *Elementos*, se reconhecerá que o ângulo externo, aí posto como meio para provar uma propriedade do triângulo, que é a de ter três [ângulos iguais a dois retos], não é a definição nem do triângulo (como é evidente), nem da propriedade. Tanto o triângulo em si mesmo, como o ter três [ângulos iguais a dois retos], não carecem do ângulo externo para a sua definição, uma vez que, ainda que este não exista, continua a ser triângulo e a ter três [ângulos iguais a dois rectos][323].

Apesar da dependência dos comentários de Proclus, há divergências profundas na maneira como Piccolomini concebe a relação da lógica e da matemática. Enquanto Proclus pretendia reduzir a importância da lógica na compreensão da matemática, Piccolomini tinha como um de seus objetivos principais mostrar a superioridade da silogística na condução da investigação científica. Com isso, ele procurava apresentar-se como um autêntico aristotélico[324]. Na paráfrase de Questões mecânicas (*Parafrasi di monsignor Alessandro Piccolomini arciuescouo di Patras, sopra le Mecaniche d'Aristotile, tradotta da Oreste Vannocci Biringucci, gentilomo senese*), Piccolomini reafirma sua tese sobre a matemática:

> No entanto, nós, em outras ocasiões de discussão, sustentamos e agora afirmamos constantemente que as demonstrações utilizadas pelos matemáticos não são as mais poderosas [*potissime*] e principais procuradas por Aristóteles com todo o cuidado nos livros sobre demonstração [i.e., nos *Analíticos*]. De onde se segue que há outra causa pela qual elas são colocadas no primeiro grau de certeza, como amplamente declaramos em nosso pequeno livro que compusemos sobre a certeza das ciências matemáticas, declarando esta opinião com razões muito claras, tomando

---

mathematicae, habita tamen occasione a quantitatibus in materiae sensibili repertis. Intellectus autem, ex iis, quae in phantasia sunt in quantitatibus, rationes illas universals colligit.

323 Piccolomini, *In Mechanicas Quaestiones Aristotelis*, 1547p. 104r: (...) inducendo per omnia Theoremata Euclidis, Theodosii, Archimedis, & aliorum. exempli gratia, si Theorema millies allegatum.32.primi Elem. perpendatur, cognoscetur quod angulus extrinsecus, qui ponitur ibi medium, ad declarandam passionem, quae est habere tres, de triangulo, non est diffinitio, neque trianguli (vt patet) nec passionis, tam enim triangulus quam habere tres, non indiget in sui diffinitione angulo extrinseco. quo non existente, etiam est triangulus, & habet tres.

324 Percebe-se isso nos textos publicados por ele em 1551: *L'instrumento della filosofia* e *La prima parte della filosofia naturale*.

como base Proclus, no [comentário ao] primeiro [livro] dos *Elementos*[325].

Piccolomini ignora as advertências aristotélicas sobre a diferença entre o conceito de demonstração, segundo os critérios lógicos e epistêmicos estabelecidos nos *Analíticos posteriores*, e as maneiras como as proposições matemáticas são justificadas segundo o contexto e a audiência. Como já sublinhado, Aristóteles sabia que o matemático nem sempre explicita a causa, tampouco os princípios, mas isso não mostra que a matemática não é causal. Ao negar que qualquer uma das quatro causas fizesse parte do raciocínio matemático Piccolomini deixou de responder como poderia ser a geometria uma ciência, afinal. Para responder à polêmica provocada por Piccolomini, a partir de sua interpretação de Proclus, os defensores de Aristóteles poderiam levar a termo a missão de reconstruir as demonstrações euclidianas silogisticamente. Não foi isso que aconteceu.

5.6. Cristóvão Clávio

As réplicas a Piccolomini não tardaram a aparecer. Vieram, em primeiro lugar, de Francesco Barozzi (1537 – 1604)[326] e Pietro Catena (1501 – 1576) em duas preleções separadas na Universidade de Pádua. Por um lado, ambos concordavam com Piccolomini acerca da incompatibilidade entre as demonstrações de Euclides a chamada *demonstratio potissima*, i.e., a demonstração mais poderosa. Por outro lado, rejeitaram as conclusões mais pessimistas dele sobre o conhecimento matemático[327]. O matemático jesuíta Cristóvão Clávio

[325] Nondimeno, e noi altre volte disputando habbian sostenuto, et hora affermiamo costantemente, che le demostrationi, di che si seruono i matematici, non sono quelle potissime e principali ricercate da Aristotile con ogni diligentia nei libri della demostratione. Onde segue, che altra sia la cagione, per la quale son riposte nel primo grado della certezza si come noi largamente nel libretto, che habbiam composto sopra la certezza delle scientie matematiche dichiarammo questa opinione con ragioni manifestissime; pigliandone occasione da Proclus, nel primo degli elementi (Piccolomini 1582, p. 10).

[326] Natural da Ilha de Creta, Barozzi foi um humanista pertencente à nobreza veneziana. Além de traduzir os comentários de Proclus em 1560, ele também traduziu Herão de Alexandria (*Heronis mechanici liber*, 1572) e Pappus (*Coleção matemática*, 1588). O escrito pelo qual ficou conhecido é o *Cosmographia* (1585). Apesar desse interesse pelas ciências matemáticas, Barozzi também tinha os dois pés no esoterismo, provável razão de suas duas condenações pela Inquisição (em 1583 e 1587). Ver Marco Sgarbi, *Encyclopedia Of Renaissance Philosophy*, Springer, 2022, pp. 329-331. Paul Lawrence Rose, A venetian patron and mathematician of the sixteenth century: Francesco Barozzi (1537 – 1604), *Studi Veneziani*, I, 119–178, 1977.

[327] Ver Anna De Pace, *Le matematiche e il mondo. Ricerche su un dibattito in Italia nella seconda metà del Cinquecento*, Milano, 1993, p. 349-430.

(1538 - 1612)[328], aferrado ao aristotelismo-escolástico da Companhia de Jesus[329], vai tentar defender as matemáticas das ameaças céticas ao mesmo tempo em que reivindica para elas um papel de destaque na *Ratio Studiorum*. As inovações ao debate, porém, ficam por conta de Biancani, discípulo de Clávio, ao qual se juntam, no século seguinte, Borelli e Barrow.

Instado pelo rei Ferdinand I de Viena, Inácio de Loyola debruçou-se sobre qual seria o currículo educacional a ser seguido nas universidades. Em carta de 1551, enviada a Claude Jay, Loyola fala da importância do estudo das línguas (latim em primeiro lugar e, se possível, grego e hebraico) e da filosofia como preparativos para teologia. A matemática não era preocupação imediata. Não obstante isso, matemáticos jesuítas tiveram uma participação importante no debate sobre os princípios matemáticos nos séculos XVI e XVII. Para além dos humanistas, o desenvolvimento do conhecimento matemático contou com a colaboração de três ordens católicas, a quais reuniram alguns dos nomes mais importantes dos séculos XVI-XVII: A Companhia de Jesus, fundada por um grupo liderado por Inácio de Loyola, que teve entre seus representantes Cristóvão Clávio (1538–1612), André Tacquet (1612–1660), Gregoire de Saint Vincent (1584–1667), Paul Guldin (1577–1643), Giovanni Saccheri (1667–1733); a Congregação do Oratório, fundada por Pierre de Bérulle: Nicolas Malebranche (1638–1715), Bernard Lamy (1640–1715), Charles René Reynaud (1656–1728); os jansenistas: Blaise Pascal e Antoine Arnauld (1612–1694). Alguns dos nomes acima são hoje considerados matemáticos originais, como Clávio, Tacquet, Saccheri e Cavalieri. Todos esses autores deixaram comentários sobre os *Elementos*. Some-se a estes Marin Mersenne

[328] Segundo Bernardino Baldi, Clávio nasceu em 1538 em Bamberg, localizada na região da Francônia (Alemanha). Em 1555, ele entrou para a Ordem dos Jesuítas aos dezessete anos. Pouco tempo depois foi enviado por Inácio de Loyola para estudar em Portugal, onde foi aluno de Pedro da Fonseca (1528 - 1599). Ainda segundo Baldi, Clávio começou a estudar matemática por conta própria, pois queria entender os exemplos usados por Aristóteles nos *Analíticos posteriores*. Em vida, publicou duas edições dos *Elementos*, uma em 1574 e outra em 1589, sendo esta última mais conhecida pela discussão sobre o Postulado das Paralelas. Atualmente o nome de Clávio está associado à defesa da reforma do Calendário Gregoriano. Tais fatos são retratados com riqueza de detalhes por Baldi, *Le Vite De' Matematici* [*Cronica de Matematici*,], edição de Elio Nenci, Milão, 1998, p. 558-577. Destacamos também o fato de Clávio dedicar sua edição dos *Elementos* a Emanuel Filiberto, Duque de Sabóia, um importante benfeitor da Companhia de Jesus.

[329] A Ordem dos Jesuítas surgiu em Paris no ano 1534 composta por Inácio de Loyola, Francisco Xavier, Simão Rodrigues, Pedro Favre, Diogo Laínez, Afonso Salmerón e Nicolau Bobadilha. A Companhia de Jesus foi reconhecida como ordem religiosa pelo Papa Paulo III na bula *Regimini militantis Ecclesiae* de 27 de setembro de 1540, que incluía *A fórmula do Instituto* (*Formula Instituti*). Em 1546, Inácio de Loyola enviou Diego Laínez, Alfonso Salmerón e Claude Jay para o Concílio de Trento. Sobre a importância dos jesuítas para o desenvolvimento das ciências modernas, especialmente as matemáticas, ver Wallace, *Galileo and his sources: the heritage of the Collegio Romano in Galileo's science*, 1984; Peter Dear, Jesuit mathematical science and the reconstitution of experience in the early seventeenth century. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, v. 18, n. 2, 1987; Grendler, P. F. *The Jesuits and Italian Universities, 1548-1773*. Catholic University of America Press, 2017; Cristiano Casalini, *Jesuit Philosophy on the Eve of Modernity*, Leiden, 2019.

(1588 – 1648), da Ordem dos Mínimos, e Boaventura Cavalieri (1598–1647), da Ordem dos Jesuati, extinta em 1688 pelo Papa Clemente IX[330].

Clávio defendia a inclusão de tratados matemáticos de Euclides, Teodósio e Sacrobosco na *Ratio Studiorum*, a principal referência da organização curricular dos saberes na Sociedade de Jesus na direção da uniformidade e solidez doutrinária (*uniformitas et soliditas doctrinae*)[331]. Ele se manifesta sobre a *Quaestio*, ainda que indiretamente, em *In disciplinas mathematicas prolegomena,* texto com o qual prefaciou sua então edição dos *Elementos* presente na *Opera Mathematica* de 1612. Muito do que vai ali reflete, primeiramente, uma adesão às autoridades de Platão e Aristóteles, especialmente. Essa adesão, mais uma vez, era esperada dos membros da Companhia de Jesus[332]. Sem mencionar, todavia, o nome de Piccolomini, Clávio inicia afirmando que a geometria é uma ciência, quer seja na maneira mesma como o conhecimento é organizado, *i.e,* partindo-se de princípios primeiros, quer seja na maneira como se raciocina (*modum rationemque*) para se chegar às conclusões. E um pouco mais adiante, ainda no *Prolegomena*, diz Clávio:

> Mas, se a dignidade e a excelência de uma ciência devem ser julgadas pela certeza das demonstrações que usa, sem dúvida as ciências matemáticas terão o primeiro lugar entre todas as outras. De fato, elas demonstram tudo o que analisam mediante raciocínios sólidos e estabelecem isso de tal maneira que despertam conhecimento genuíno na mente do aluno e não deixam absolutamente nenhuma dúvida. É difícil concordar com outras ciências, já que, muitas vezes, o intelecto não resolvido e indeciso sente-se envergonhado por uma infinidade de opiniões e uma variedade de opiniões no julgamento da verdade das conclusões[333].

---

330 Ver Jorge Alberto Molina, Port Royal: Filosofía de la Geometría. *Revista Portuguesa de Filosofia*, v. 73, n. 3/4, 2017, p. 1205; idem, Catholicism and Mathematics in the Early Modernity, *Interfaces between Mathematical Practices and Mathematical Education*, 2019, p. 50-54)

331 Ver Rommevaux, *Clavius: une clé pour Euclides au XVIe siècle*, Paris, 2005, capítulo 1.

332 A Sociedade de Jesus comandava o Collegio Romano (Itália), La Flèche (França), além dos colégios de Coimbra e Évora (Portugal) sob a proteção e financiamento de D. João III. A respeito da influência dos jesuítas no ensino de Aristóteles em Coimbra, ver Cristiano Casalini, *Aristóteles em Coimbra: Cursus Conimbricensis e a educação no Collegium Artium*, Coimbra, 2015. Os cursos de direito e medicina só poderiam ser ensinados nas universidades; portanto, estavam além dos domínios jesuítas. Por outro lado, os cursos de filosofia, mesmo em universidades seculares, eram monopólio dos jesuítas. O curso superior era composto pelas seguintes disciplinas: lógica (Aristóteles, Boécio e Pedro Hispânico), filosofia natural (*Física* de Aristóteles) e metafísica (*Metafísica* de Aristóteles). O problema envolvendo o V Concílio de Latrão (1512-17), sobretudo o decreto Apostolici regimini, de 1513, era o aristotelismo secular, i.e., as doutrinas ensinadas em centros educacionais não vinculados à Igreja. Nas universidades seculares, poder-se-ia usar Aristóteles em prol da fé cristã, mas teologia e filosofia eram mantidas à parte, de modo que o Estagirita não seria a única via para se demonstrar que Deus existe e é o criador do mundo, que a alma é imortal.

333 Clávio, *Opera Mathematica*, Tomo I, *In Euclidis Elementa Geometrica*, 1612, p 5: Si vero nobilitas, atque praestantia scientiae ex certitudine demonstrationum, quibus vtitur, sit iudicanda; haud dubie Mathematicae disciplinae inter caeteras omnes principem habebunt locum. Demonstrant enim omnia, de quibus suscipiunt disputationem, firmissimis rationibus, confirmantque, ita vt vere scientiam in auditoris animo gignant, omnemque prorsus dubitationem tollant: Id quod aliis scientiis vix tribuere possumus, cum in eis saepenumero intellectus multitudine opinionum, ac sententiarum varietate in veritate conclusionum iudicanda suspensus haereat, atque incertus.

Como se nota, Clávio não pretendia apenas resgatar uma visão positiva sobre a certeza matemática, como também almejava restabelecer uma hierarquia supostamente aristotélica das matemáticas em relação à filosofia natural através da pureza de suas respectivas demonstrações. (Como se verá logo mais, o contra-ataque de Barrow também baseou-se na superioridade das demonstrações matemáticas em relação aos outros gêneros de ciência.) Clávio ainda lembra ao leitor, na sequência, que é nas matemáticas e não nas ciências naturais onde se pode encontrar um ideal de estabilidade epistemológica. Diz ele: "De fato, os teoremas de Euclides e de todos os outros matemáticos preservam hoje nas escolas, e depois de muitos anos, a mesma pureza da verdade, a mesma certeza das coisas, a mesma força e firmeza das demonstrações"[334]. Ou seja: sem o reconhecimento do caráter científico do saber matemático não haveria como explicar de que maneira Euclides alcançou tamanho êxito na demonstração de seus enunciados. Note-se, porém, que embora Clávio associe a certeza matemática à pureza de suas demonstrações, ele não atribui o sucesso dos *Elementos* ao *modo* como Euclides expôs suas demonstrações.

Os argumentos de Clávio em defesa das matemáticas são bem parecidos aos de Regiomontano. Em 1464, Regiomontano conduziu na Universidade de Pádua um curso sobre o astrônomo árabe al-Farghani, cujo texto introdutório à astronomia *De scientia stellarum,* escrito no século IX, fora traduzida para o latim no século XII. Desse curso só sobrou a Oração Inaugural, onde Regiomontano traça uma história das matemáticas[335]. Clávio deve ter tomado conhecimento da obra de Regiomontano graças à tradução de al-Farghani feita por Jean de Seville, cuja primeira edição é 1493 e a segunda, de 1537[336]. Chama atenção, em especial, a comparação das matemáticas e as diversas áreas da filosofia. Diz Regiomontano:

> Quais ramos, cortados e separados entre si e do seu tronco, esta seita [aristotélica] produziu? Alguns imitam João Escoto; outros seguem Santo Tomás; alguns fluem com um intelecto misto para cá e para lá [...] Quanto mais líderes a filosofia possui, menos se aprende nesta nossa época. Enquanto isso, o príncipe dos filósofos está completamente abandonado, e seu nome é usurpado por aquele que prevalece, mais do que outros, nos sofismas. Nem mesmo Aristóteles, se ressuscitasse, seria considerado

---

[334] Clávio, *Opera Mathematica*, Tomo I, *In Euclidis Elementa Geometrica*, 1612, p 5: Theoremata enim Euclidis, caeterorum Mathematicorum, eandem hodie, quam ante tot annos, in scholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonstrationum robur, ac firmitatem.

[335] Para mais detalhes desse texto e seu impacto no renascimento das matemáticas, ver Paul Lawrence Rose, *The Italian Renaissance of Mathematics: Studies on Humanists and Mathematicians from Petrarch to Galileo*, Genève, 1975, p. 90-118.

[336] Regiomontanus, *Rvdimenta astronomica Alfragrani [...] Item, Oratio introductoria omnes scientias mathematicas Ioannis de Regiomonte, Patauij habita, cum Alfraganum publice praelegeret. Eivsdem utilissima introductio in elementa Euclidis,* Nuremberg, 1537.

> suficientemente compreendido por seus discípulos e seguidores. Ninguém ousa proclamar isso sobre nossas disciplinas [as matemáticas], a menos que esteja insano, visto que nem o tempo nem os costumes humanos podem distrair delas. Os teoremas de Euclides têm hoje a mesma certeza que tinham há mil anos atrás. As descobertas de Arquimedes ainda causarão grande admiração aos homens que virão depois de mil séculos[337].

Não se pode deixar de frisar um aspecto fundamental desse texto, pois constitui um dos principais objetivos de Clávio, a saber, a ligação entre o conhecimento matemático e o estudo de Aristóteles. Sem um conhecimento de matemática, ainda que elementar, diz Regiomontano, não se poderia compreender inúmeros passos da *Meteorologia*, *Física*, *Metafísica* ou o *De Caelo*. Além disso, é o próprio Aristóteles quem atribui o primeiro grau de certeza às ciências matemáticas e que considera que só quem estudar esta disciplina em profundidade poderá ser considerado sábio[338].

As ideias apresentadas nos *Prolegomena* encerram um longo período da vida intelectual de Clávio dedicado à defesa do conhecimento matemático. Nota-se ali, em especial, a persistência dum tema explorado ao longo da década de 1580 em três textos: *Ordo servandus in addiscendis disciplinis mathematicis,* de 1581; *Modus quo disciplinae mathematicae in scholis Societatis possent promoveri*, de 1582; e *De re Mathematica instructio*, de 1593[339]. O texto de 1582 se sobressai em relação aos demais porque, ao contrário do que viria a dizer o padre jesuíta no *Prolegomena*, onde antepôs o conhecimento das ciências matemáticas ao da filosofia natural, em franca oposição ao que dizia Piccolomini, ele expôs aqui uma tese conciliadora, argumentando que a matemática é uma aliada indispensável na aquisição de conhecimento sobre os fenômenos naturais — ainda que,

---

337 Regiomontanus, *Rvdimenta astronomica Alfragrani [...] Item, Oratio introductoria omnes scientias mathematicas Ioannis de Regiomonte, Patauij habita, cum Alfraganum publice praelegeret. Eivsdem utilissima introductio in elementa Euclidis,* Nuremberg, 1537, p. 50-51: Quos ramos inter se et a stipite suo diversos haec secta produxit? Pars Ioannem Scotum imitatur; alii sanctum Thomam; nonnulli autem ingenio promiscuo hac atque illac defluunt . . . Igitur quo plures philosophia duces habet, eo minus hac nostra tempestate addiscitur. Princeps interea philosophorum prorsus destituitur, nomenque suum is sibi usurpat, que in sophismatibus plus caeteris valet, neque Aristoteles ipse si revivisceret discipulos suos atque sequaces satis intelligere crederetur. Quod de nostris disciplinis nemo nisi insanus praedicare ausit, quandoquidem neque aetas neque hominum mores sibi quicque detrahere possunt. Theoremata Euclidis eandem hodie quam ante mille annos habent certitudinem. Inventa Archimedis post mille secula venturis hominibus non minorem inducent admirationem.

338 Regiomontano, *Rvdimenta astronomica Alfragrani [...] Item, Oratio introductoria omnes scientias mathematicas Ioannis de Regiomonte, Patauij habita, cum Alfraganum publice praelegeret. Eivsdem utilissima introductio in elementa Euclidis,* Nuremberg, 1537, B4v: Nunquid nescitis quam crebro Mathematicis utitur exemplis Peripateticus ille philosophus? cuncta ferme scripta sua mathesim redolent, quasi nemo Aristoteli intelligendo censeatur idoneus, qui liberale quadriuium neglexerit. Frustra tertio meteororum discendo te contuleris, nisi Geometrica fundamenta nactus his, aut docte perspectiuam teneas. Secundum et tertium de coelo & mundo nunquam intelliges, si Astrorum disciplinam socordia praeterieris. Qui septimum Physicorum absque notitia proportionum discere possit, arbitror esse neminem. Nonne arduum uidebatur Aristoteli in duodecimo metaphysicae suae naturam intelligentiarum coelestium demonstrare, inde adeo quod Astronomiae haud satis studuerit?

339 Ver Ladislaus Lukács, SJ (Ed.), *Monumenta Paedagogica Societatis Iesu. Collectanea de Ratione Studiorum Societatis Iesu (1588-1616)*, Vol. VII, Roma, 1992.

provoca o autor, a filosofia natural sem as matemáticas seja uma disciplina aleijada e imperfeita. Por essa razão, continua ele,

> (...) é necessário que os discípulos devam entender que essas ciências [as matemáticas] são úteis e necessárias para o correto entendimento do resto da filosofia e que são, ao mesmo tempo, um complemento a todas as outras artes, de maneira tal que o conhecimento perfeito pode ser adquirido; em verdade, essas ciências e a filosofia natural têm tamanha afinidade entre si que, a menos que ofereçam ajuda mútua entre si, não conseguirão preservar suas posições. Para que isso aconteça, é preciso, primeiro, que os estudantes de física devam estudar disciplinas matemáticas ao mesmo tempo — um costume que sempre foi observado nas escolas da Sociedade até agora. Porque se essas ciências fossem ministradas em tempos diferentes, os estudantes de filosofia pensariam, compreensivelmente, que não são necessárias para a física[340].

É através das matemáticas, continua Clávio, que se aprende muitas coisas úteis, como o movimento das estrelas e cometas sobre a orbe celeste[341], na astronomia; a infinita divisibilidade do *continuum*, na física; o movimento das ondas e dos ventos, na meteorologia; na verdade, diz ele, até mesmo um correto conhecimento sobre as teses de Platão e Aristóteles seria impossível sem um conhecimento mínimo de matemática. Por tudo isso, diz Clávio,

> (...) será de muita ajuda se os professores de filosofia se abstenham dessas questões que são de pouco valor na compreensão da filosofia da natureza e que, na maioria das vezes, atiçam uma opinião pobre sobre a matemática entre os estudantes. Refiro-me, por exemplo, a essas questões que enunciam: a matemática não é uma ciência; não possui demonstrações; abstrai do Ser e do Bem, etc[342].

As posições de Clávio, como se nota, procuravam adequar-se ao máximo à tradição aristotélica, seja por recomendação expressa da Companhia de Jesus, seja por

---

[340] (...) [N]ecesse est, ut discipuli intelligant, has scientias esse utiles et necessarias ad reliquam philosophiam recte intelligendam, et simul magno eas ornamento esse omnibus aliis artibus, ut perfect am eruditionem quis acquirat. Immo vero tantam inter se habere affinitatem hasce scientias et philosophiam naturalem, ut nisi se mutuo iuvent, tueri dignitatem suam nullo modo possint. Quod ut fiat, necessarium erit primo, ut auditores physices audiant simul disciplinas mathematicas. Qui mos hactenus in scholis Scietatis semper fuit. Nam si alia tempore praelegentur hae scientiae, existimarent philosophiae auditores, neque immerito, eas nullo modo esse necessarias ad physicam. Ver Ladislaus Lukács, SJ (Ed.), *Monumenta Paedagogica Societatis Iesu. Collectanea de Ratione Studiorum Societatis Iesu (1588-1616)*, Vol. VII, Roma, 1992, p. 116.

[341] Cristóvão Clávio notabilizou-se por sua ferrenha oposição à teoria heliocêntrica de Copérnico e seus seguidores.

[342] "Ad hoc etiam multum conferet, si praeceptores philosophiae ab illis quaestionibus abstineant, quae parum iuvant ad res naturales intelligendas, et plurimum auctoritatis disciplinis mathematicis apud auditores detrahunt: quales sunt illae, in quibus docent, scientias mathematicas non esse scientias, non habere demonstrationes, abstrahere ab ente et bono etc". Ver Ladislaus Lukács, SJ (Ed.), *Monumenta Paedagogica Societatis Iesu. Collectanea de Ratione Studiorum Societatis Iesu (1588-1616)*, Vol. VII, Roma, 1992, p. 117.

convicção do próprio autor[343]. Clávio estava convicto de que a consecução do projeto educacional da Companhia de Jesus, bem como a adequação de Euclides aos cânones de Aristóteles, que, ao fim e ao cabo eram dois lados da mesma moeda, seria preciso dar uma nova exposição das demonstrações contidas nos *Elementos*. Eis a recomendação de Clávio:

> Ou, então, deixem que [os estudantes] proponham demonstrações novas e originais das proposições de Euclides. Dê-se, nestas academias, congratulações àqueles que melhor resolvem o problema proposto, ou são responsáveis pelo menor número de silogismos imperfeitos (os quais são comuns o bastante) na invenção de novas demonstrações.

O resultado disso, continua o autor, é que o estudante se tornaria sequioso dos estudos matemáticos, por ter a expectativa dalgum tipo de honraria, ao mesmo tempo em que compreenderia a excelência científica daqueles conhecimentos.

Para além das motivações pedagógicas de Clávio, que foram aqui realçadas para explicar as modificações feitas ao texto de Euclides, é preciso que se note também como sua posição ilustra uma preocupação com o papel das matemáticas no processo de explicação dos fenômenos naturais. Muito mais do que preservar as matemáticas no currículo da *Ratio Studiorum*, os argumentos de Clávio mostram como este estava ciente da necessidade de colocar a geometria a par dalgumas inovações pelas quais começava a passar a filosofia natural. Todavia, se por um lado Clávio ajudou a sedimentar as ligações entre Euclides e Aristóteles, ele convenientemente deixou de lado o desafio mais profundo posto por Piccolomini sobre o papel da causalidade nas demonstrações matemáticas, especialmente as passagens de Proclus que supostamente endossam tal interpretação.

---

[343] Após o Concílio de Trento, realizado entre 1545 e 1563, Tomás de Aquino foi promulgado Doutor da Igreja pelo Papa Pio V, fato que teve repercussão imediata na Companhia. Ignácio de Loyola logo se manifestou dizendo que, na teologia, dever-se-ia seguir o tomismo (in theologia praelegendum esse S. Thomam). Com efeito, já ao fim do Concílio de Trento Francisco de Bórgia e Aragão, SJ, fez circular as seguintes advertências: "Que ninguém defenda ou ensine qualquer coisa oposta, prejudicial, ou desfavorável à fé, quer seja na filosofia, quer seja na teologia. Que ninguém defenda qualquer coisa contrária aos axiomas recebidos pelos filósofos, tais como: há apenas quatro tipos de causas; há apenas quatro elementos; há apenas três princípios de coisas naturais; fogo é quente e seco; ar é úmido e quente" (Rochemonteix, 1889, vol. IV, p. 4, n. 1). Em 1548 Antonio Bladio publica as *Exercitia spiritualia* de Inácio de Loyola. O texto é bastante claro acerca do papel dos escolásticos no entendimento das Escrituras. Veja-se, por exemplo, "*Regulae aliquot servandae, ut cum orthodoxa ecclesia vere sentiamus*". A regra 11 estabelece que os escolásticos podem servir de referência para resolver questões doutrinárias, ao passo que a regra 13 diz que, se a Igreja define algo como preto, parecendo ser branco às vistas, *deve-se seguir irrestritamente a Igreja*. Dando sequência a essas advertências e recomendações, a primeira versão da *Ratio Studiorum* de 1586 estabelece que, em assuntos teológicos, a *Suma Teológica* goza de um grau de confiabilidade inferior apenas ao das Escrituras. Por tudo isso, diz-se, finalmente: "Em lógica, filosofia natural, moral e metafísica, [deve-se] seguir a doutrina de Aristóteles; e nas outras artes liberais, bem como nos comentários, tanto esses autores quanto os de humanidade [i.e., latim, grego, hebreu e retórica], dos quais os discípulos devem ver, serão selecionados e nomeados, o que deve acontecer outrossim com aqueles cujas doutrinas os mestres seguirão. Ver *De studiis in constitutionibus Societatis Iesu*, Cap. XIV, §3, In: Lukács, *Monumenta paedagogica Societatis Iesu*, vol. 1, 1965, p. 299.

Apesar de defenderem teses contraditórias, tanto Piccolomini quanto seus opositores, especialmente Barozzi, Catena, Clávio e Biancani, consideravam estar defendendo uma interpretação fidedigna de Aristóteles acerca da matemática. Deve-se notar que o perfil institucional dos centros acadêmicos ao qual esses autores estavam vinculados contribuiu para essas interpretações contraditórias de Aristóteles. Piccolomini era professor na Universidade de Pádua, um centro acadêmico laico, ao passo que Clávio e Biancani eram jesuítas e ensinavam em colégios da Companhia de Jesus. Trata-se, portanto, de uma oposição entre um aristotelismo secular e uma versão cristã escolástica. Segundo Jorge Molina, a contribuição de pensadores católicos ao desenvolvimento das matemáticas ia além das diretrizes institucionais, ainda que submetida aos princípios doutrinários do cristianismo. Ele argumenta, com efeito, que, em primeiro lugar, o cultivo do conhecimento matemático serviria ao propósito de aceitar os mistérios da fé cristã; que, para muitos intelectuais, especialmente os católicos, a geometria seria inabalável às objeções céticas; que as matemáticas seriam úteis à teologia; ajudariam a entender determinados conceitos filosóficos[344].

5.7. Giuseppe Biancani

A resposta de Clávio aos desafios lançados por Piccolomini se limitou a uma defesa das matemáticas sob o ponto de vista pedagógico e institucional da Companhia de Jesus. Coube a um de seus discípulos do Colégio Romano, o também jesuíta Giuseppe Biancani (1566 – 1624), a missão de calar os críticos da primazia do conhecimento matemático e, com isso, de sua cientificidade[345]. Biancani defende não só que as demonstrações matemáticas são perfeitas, como também que admitem tanto a causa formal quanto a material. Biancani é também o primeiro autor a dizer que Euclides procede através

[344] Molina, Catholicism and Mathematics in the Early Modernity, *Interfaces between Mathematical Practices and Mathematical Education*, 2019, p. 54. Molina cita os textos de Antoine Arnauld (*Nouveaux Élémens de Géométrie*), Blaise Pascal (Carta a Fermat, 10 de agosto de 1660), a *Logique* de Arnauld & Nicole, e um tratado de matemática de Bernard Lamy (*Traité de la grandeur en général,* 1680) e O segundo ponto é ilustrado por Marin Mersenne (*La verité des sciences contre les Sceptiques ou Pyrrhoniens* de 1625) . A utilidade das matemáticas para a teologia é destacado desde o início do século XVI: por exemplo, Bessarion (*In calumniatorem Platonis*, Livro IV, f. 80v) e Giorgio Valla (Livro I, cap. XXIII).

[345] A respeito de Biancani, veja-se Wallace, *Galileo and his sources: the heritage of the Collegio Romano in Galileo's science*, 1984, pp. 141-148; Peter Dear, Jesuit mathematical science and the reconstitution of experience in the early seventeenth century. *Studies in History and Philosophy of Science Part A, v. 18, n. 2,* pp. 146-152; do mesmo autor, *Mersenne and the Learning of the Schools*, Cornell University Press, 1988, 67-68, *Discipline and Experience: The Mathematical Way in the Scientific Revolution,* University of Chicago Press, 1995, cap. 2.; Mancosu, *op. cit.*, pp. 15-19, 178-212.

de entimemas em suas demonstrações, as quais poderiam ser reduzidas a silogismos demonstrativos.

Biancani trata da *quaestio de certitudine mathematicarum* no texto *De Mathematicarum natura dissertatio*, o qual aparece com o seu *Aristotelis loca mathematica ex universis ipsius operibus collecta et explicata*, de 1610[346]. Trata-se de um texto curto, onde o autor fala a respeito da natureza dos objetos matemáticos (*De subiecto Geometræ et Arithmetica quod folet dici Materia intelligibilis*); da perfeição de suas demonstrações (*De medio Demonstrationum Geometrie et Arithmeticæ seu An sint potissime Demonstrationes*); das "calúnias" de Piccolomini *et caterva* contra as matemáticas (*Recentiorum calumniæ aduersus Mathematicas diluuntur*); da excelência do conhecimento matemático (*De præftantia scientia quam nobis pariunt Geometria & Arithmetica*); das matemáticas aplicadas, a saber, astronomia, ótica, mecânica e música (*De Mathematicis medys: Astronomia, Perspectiva, Mathematica Musica*).

O livro de Biancani é publicado num contexto muito mais desfavorável ao pensamento aristotélico do que tinha sido na época de Piccolomini e Clávio. E muito disso se deve à divulgação das ideias científicas de Copérnico, Bruno, Kepler e Galileu na Europa[347]. Além disso, o Colégio jesuíta de Pádua, onde Biancani lecionava, seria alvo de graves ataques entre os anos 1589 e 1591: ataques verbais contra o corpo docente, protesto de estudantes, depredação do patrimônio, etc. O recrudescimento dos atos foi usado como pretexto pelos opositores dos jesuítas — professores na Universidade de Pádua, que era uma instituição secular, políticos e membros da nobreza — junto ao Senado de Veneza, que então fechou o Colégio para estudantes leigos em 1591[348]. Ante esses fatos pode-se especular que o objetivo principal de Biancani era fazer uma ampla defesa do aristotelismo da Companhia de Jesus para mostrar sua relevância na condução do desenvolvimento científico. Para tanto, ele deveria mostrar, contra os "mercadores do conhecimento", que às matemáticas corresponderia o grau mais elevado de conhecimento demonstrativo de maneira irrestrita.

---

[346] Esse não é o primeiro livro a expor passagens da obra aristotélica concernentes às matemáticas. Pietro Catena, professor em Pádua, escreveu 1556 *Universa loca in logica Aristotelis in mathematicas disciplinas*. Além disso, o envolvimento na *quaestio* parece fora do *timing*. A réplica não chegaria a Piccolomini, já falecido, nem se poderia esperar resgatar a centralidade das matemáticas na *Ratium Studiorum*, como originalmente Clávio havia proposto.

[347] Sobre as conversas entre Galileu e Biancani, ver Wallace, *Galileo and his sources: the heritage of the Collegio Romano in Galileo's science*, 1984, pp. 269-272.

[348] Sobre a atuação profissional dos jesuítas nas universidades italianas, ver Paul F. Grendler, *The Jesuits and Italian Universities, 1548-1773*. Catholic University of America Press, 2017. O capítulo 5, em especial, relata o caso do Colégio de Pádua. A expulsão dos jesuítas de Pádua em 1606 (com readmissão desses apenas em 1657) não tem nada a ver com o conteúdo ministrado no Colégio.

A ontologia da matemática de Biancani, tal qual a praxe do século XVI, segue o abstracionismo atribuído a Aristóteles. Tanto nas matemáticas quanto na filosofia natural, i.e., a física, e até mesmo a metafísica, estuda-se as quantidades, mas o matemático as estuda abstraindo-as do movimento e determinações materiais. Os principais atributos dessa quantidade inteligível são a finitude e limitação. Biancani assume que os conceitos de finitude e limite não são coextensivos. A geometria euclidiana, ainda segundo ele, mostra-se apta a tratar também desse tipo de quantidade inteligível, pois se fosse dado um triângulo infinito, da mesma forma poderia ser mostrado que ele possui três ângulos iguais a dois ângulos retos (*si enim daretur triangulum infinitum eodem modo de eo ostendi posset habere tres angulos æquales duobus rectis*)[349].

Ora, uma vez que a quantidade estudada na matemática é abstraída da matéria sensível, a validade das demonstrações dessa ciência, conclui Biancani, não depende da verificação empírica. Isso quer dizer não só que os objetos da geometria não existem no mundo físico sublunar, como também não podem ser instanciados por objetos imperfeitos, como as figuras. Os objetos matemáticos, tal qual os objetos astronômicos, são perfeitos[350]. De novo Biancani:

> Embora [as figuras geométricas] não existam na realidade das coisas, porquanto estejam na mente do Autor da natureza, bem como na mente humana, suas ideias existem como os tipos mais exatos das coisas, como entidades matemáticas exatas. O matemático investiga essas ideias, que são primeiramente concebidas por si mesmas e que são verdadeiras entidades. Deve-se dizer, portanto, que essas entidades geométricas são entidades absolutas em relação a todos os números, por si mesmas, e verdadeiras, tanto em relação a figuras naturais quanto artificiais que existem nas coisas, quando não são intencionadas por nenhum agente eficiente. As figuras naturais e artificiais são entidades acidentalmente imperfeitas e falsas[351].

No que diz respeito às réplicas a Piccolomini, os argumentos apresentados não vão muito além da evocação dos nomes de Platão, Aristóteles e Proclus — em citações descuidadas e acríticas, diga-se —, por parte dos antigos, Averróis, dentre os medievais, e

---

349 Biancani, *De Mathematicarum natura dissertatio,* 1615, p. 6.

350 Não é acidental a menção à perfeição dos objetos celestes. Para a tradição aristotélica, sobretudo a suposta tradição mais ortodoxa dos jesuítas, os corpos celestes são fisicamente perfeitos. A Lua, por exemplo, seria uma esfera perfeita, sem nenhum tipo de protuberância, cratera ou rachaduras, tal como é vista por olhos humanos. O telescópio de Galileu mostrou a falsidade dessa crença. Sabe-se que o próprio Galileu chegou a apresentar esse instrumento a Clávio, o qual, já no fim da vida e sem tempo nem paciência para as novidades modernas, considerou aquilo coisa do Diabo. Mas isso não foi suficiente para convencer a ortodoxia aristotélica. Coube a Biancani, mais uma vez, assumir essa batalha do mestre.

351 Quamuis igitur re ipsa non existant quia tamen tamin mente Auctoris naturæ quàm in humana eorum Ideæ tamquam exactissimi rerum typi necnon tamquam exacta entia mathematica exiftunt Ideo de ipsis eorum idæis quæ per se primo intenduntur et quæ vera funt entia agit Mathematicus. Quapropter dicendum eft entia hæc Geometrica omnibus numeris absoluta esse entia per se et vera figuræ vero tum naturales tum artificiales quæ in rebus existunt cum a nullo efficiente intendantur esse entia per accidens imperfecta et falsa.

Toledo e Zabarella dentre os modernos. Mas, apesar do muito que se poderia dizer em desfavor dos argumentos de Biancani, deve-se ressaltar os momentos em que ele diverge da tradição à qual alega pertencer. Biancani entende que as matemáticas têm o grau máximo de certeza porque somente suas demonstrações são perfeitas (*potissimae*), i.e., explicam o que é (*quid*) e porque é (*propter quid*). Assim sendo, são também demonstrações causais. Mas, ao contrário dos autores até aqui considerados, para os quais apenas a causa formal (definicional) pode estar contemplada nas demonstrações matemáticas, Biancani defende que as demonstrações matemáticas também procedem por causa material.

Tanto na *Física* (Livro II.3, 194b16-195b28) quanto na *Metafísica* (Livro V.1, 1013a23-1014a25), Aristóteles trata como causa tudo que pode ser concebido como princípio (*arché*), seja do que existe, do que vem a existir ou vai tornar-se conhecido. Por isso mesmo as hipóteses são causais em relação à conclusão, um dos requisitos para haver conhecimento demonstrativo. Porque são o início da demonstração. O mesmo se passa, no caso da causa material, com as partes em relação ao todo que constituem. Biancani, então, transfere esse entendimento da causa material para as relações mereológicas exibidas nos diagramas. Por outro lado, o uso de uma propriedade extraída do diagrama é extrínseca, i.e., não é uma das notas características da definição desse ou daquele objeto. Mas essas construções não constituem o meio (*medium*) para as demonstrações; elas são, ao contrário, usadas para descobrir os meios e suas conexões com as propriedades a serem demonstradas (*medium medii inuentionem et connexionem cum passione*)[352]. Isso quer dizer, portanto, que uma demonstração *propter quid* apenas explicita os atributos presentes nas definições através de uma definição causal intermediária. O recurso ao diagrama é justificado apenas enquanto permite a elaboração dessa definição intermediária.

Convém notar que embora Biancani legitime o uso dos diagramas, disso não se segue que as demonstrações são sobre essas representações visuais. O conhecimento matemático é discursivo, posto que procede dedutivamente *a partir* de primeiros princípios, e não *em direção a* eles, como na dialética (aqui, Biancani segue Platão). Eis porque, contrariamente ao que diz Proclus, a imaginação não pode ser uma faculdade do conhecimento matemático.

> Pela palavra "cogitação" deve-se entender um certo movimento da mente, isto é, um raciocínio discursivo, o que é evidenciado tanto pela palavra grega "νοήματος", quanto pela palavra latina. Pois a cogitação é chamada assim

[352] Biancani, *De Mathematicarum natura dissertatio*, 1615, p. 14.

> como se fosse um "coagitar" da mente, o que é o mesmo que um discurso ou raciocínio[353].

Porquanto seja a contemplação de corpos físicos, a imaginação, conclui Biancani, é uma faculdade mais apropriada à filosofia natural (*quare manifestum est horum Philosophorum authoritate ratiocinationem versari circa Mathematicas, imaginationem vero circa res physicas),* devendo seu uso na matemática ser limitado apenas à descoberta de novos teoremas[354].

No tocante ao contraste entre a demonstração "informal" de Euclides, o que não significa não regimentada, e os silogismos científicos, se tem notícias de uma breve, mas reveladora observação de Biancani a respeito da possibilidade de procedimentos por entimemas. Pouco tempo depois do controverso fechamento do colégio jesuíta de Pádua, Biancani retoma os temas concernentes à natureza da demonstração matemática em *Sphaera mundi seu cosmographia demonstrativa*[355]. A parte que interessa aqui são as considerações feitas ao final, no *Apparatus ad mathematicas addiscendas et promovendas*, texto com observações sobre metodologia que aparentemente foi escrito para jovens estudantes. Diz ele, então, que a demonstração matemática é um discurso certo e evidente que procede *entimematicamente* dos princípios até a conclusão. Diz ele (grifos nossos):

> A demonstração geométrica é um raciocínio certo e evidente, baseado em princípios verdadeiros e próprios da geometria, avançando *por meio de entimemas* em direção à conclusão. Para que seja bem compreendida a natureza da verdade da conclusão geométrica e outros assuntos relacionados a ela, leia o tratado sobre a natureza das matemáticas [i.e., *De Mathematicarum natura dissertatio*] no final de nossa obra sobre lugares matemáticos [na obra de Aristóteles], onde é explicado o que é a matéria inteligível, que é a única capaz de conter a verdade e a perfeição geométricas. Essa matéria é a quantidade abstrata, etc. Portanto, a verdade e a igualdade geométrica são aquelas em que duas linhas, por exemplo, são tão iguais que não há diferença alguma, não apenas sensível, mas também inteligível. Algumas coisas podem parecer iguais aos sentidos, mas não são verdadeiramente iguais geometricamente. É importante observar que, ao demonstrar, o geômetra supõe que tem essa matéria inteligível presente e pode operar com ela, ou seja, traçar essas linhas, ângulos, triângulos, etc. E embora ele possa representar linhas e figuras sensíveis em sua tábua de escrever [*in suo abaco*], isso não implica, como Aristóteles diz no Livro I [dos *Analíticos posteriores*], que ele está supondo algo falso, porque ele considera essas representações sensíveis como inteligíveis, para melhor compreensão. E, como Aristóteles afirma, o geômetra não conclui algo apenas porque é uma linha sensível, como ele mesmo explica, mas pela

[353] Biancani, *De Mathematicarum natura dissertatio*, 1615, p. 23.
[354] Idem.
[355] Biancani, *Sphaera mvndi, sev cosmographia demonstratiua , ac facile methodo tradita : in qua totius Mundi fabrica, vna cum nouis, Tychonis, Kepleri, Galilaei, aliorumq*', Bolonha, 1620.

virtude daquela inteligível que é demonstrada através do sensível. Ainda que essa matéria inteligível não exista atualmente, é suficiente que ela *possa* existir, pois o conhecimento abstrai a existência de seu objeto[356].

No tocante à forma das demonstrações geométricas (*Forma Geometricæ Demonstrationis*), Biancani segue a divisão de Proclus, a saber, enunciado (de um problema ou teorema), exposição, especificação, construção, demonstração e conclusão. A parte dedutiva é chamada discurso e é a demonstração (*discursus circa figuran constructam, qui proprie est ipsa demonstratio*). A parte discursiva, então, procede não por silogismos típicos, mas sim por entimemas:

> A demonstração procede por meio de entimemas, que provam que o que foi proposto ou foi realizado ou é verdadeiro. Esses raciocínios geométricos devem ser breves e simples, e, portanto, não se encontra neles nada que já não seja manifesto a partir do que foi exposto anteriormente. Por essa razão, a demonstração ocorre de forma entimemática, não silogística, embora possa ser reduzida à forma silogística, como fica evidente no *scholio* do Padre Clávio [à primeira proposição] do primeiro livro [dos *Elementos*]. No entanto, isso seria longo, tedioso, menos perspicaz e implicaria na repetição frequente de muitas coisas desnecessárias. Assim, quanto mais breve e simples for a demonstração, melhor será[357].

Um leitor típico do século XVII saberia a que tipo de argumento Biancani se refere quando menciona os entimemas. A retórica fazia parte do currículo da maioria dos colégios de então, incluindo os jesuítas. E caso Aristóteles não fosse a primeira autoridade no assunto, certamente os manuais de Pedro Hispânico ou Quintiliano, que se debruçaram sobre o tema, seria suficiente. A menção a Clávio, no entanto, merece um destaque à parte.

---

[356] Biancani, *Sphaera mvndi, sev cosmographia demonstratiua [...]*, 1620, p. 406-407, grifos nossos: Demonstratio Geometrica est discursus certus et euidens ex veris et proprijs Geometrie principiis per Enthymemata ad conclusionem procedens, vt autem bene intelligatur quid sit veritas conclusionis Geometricae et alia hue spectantia, lege Tractatum de natura Mathematicarum in fine operis nostri de locis Mathem. vbi dictum est quid sit materia intelligibilis, quæ sola capax est geometricæ veritatis et perfectionis: ea autem est quantitas abstracta &c sic vera et geometrica æqualitas ea est, quæ duæ, v.g., lineæ ita sunt æquales, vt nullum omnino discrimen intersit, non solum sensibile, sed nec intelligibile. quædam enim ad sensum videri possunt æqualia, quæ tamen Geometrice et vere non sunt æqualia, vbi notandum est Geometram, dum demonstrat, supponere se habere hanc materiam intelligibilem præsentem', atque in ipsa posse se operari, idest, ducere in eas lineas, angulos, triangula, &c, et quamuis in suo Abaco delineet lineas et figuras sensibiles, non tamen propterea (vt ait Arist. text 25. primi poster.) falsum supponit, quia delimeationes illas sensibiles pro intelligibilibus supponit, vt melius intelligatur et vt ait Aristoteles Geometra nihil concludit eo quod hæc est linea senfibilis, quam ipse exponit, sed virtute illius intelligibilis, quæ per senfibilem ostenditur et quamuis hæc materia intelligibilis nulla nunc extaret, satis est si possit extare, scientia enim abstrahit ab existentia sui subecti.

[357] Biancani, *Sphaera mvndi, sev cosmographia demonstratiua [...]*, 1620, p. 406-407, p. 407: Demonstratio procedens per enthymemata, quae probat aut factum esse, aut verum esse quod proponebatur. Hi autem discursus geometrici debent esse breues, et simplices, et propterea nihil in eis reperitur, quod ex praecedentibus non sit iam manifestum, et ideo procedit enthymematice non syllogistice; quamvis possit ad formam syllogisticam reduci, ut patet in scholio P. Clavii ad primam primi, sed id esset longum, et taediosum ac minus perspicuum, et multa essent saepius repetenda, et supervacanea. Demonstratio porro quo brevior, ac simplicior, eo melior.

No comentário à proposição I.1, Clávio apresenta uma reconstrução silogística, tal qual a que Piccolomini apresenta sobre a mesma demonstração euclidiana. A primeira coisa a se perceber nessas reconstruções é que nenhuma delas prescinde do recurso a alguma construção diagramática. Ou seja, apesar da identificação entre demonstração e *apodeixis*, a dedução linguística, não se poderia resolver esse primeiro problema sem a construção (*kataskeue*). Esses filósofos não pretendiam verbalizar todas as afirmações feitas nas demonstrações, ainda que esse fosse o pressuposto da definição linguística que adotavam. Eis porque Clávio, após a referida reconstrução, afirma:

> Todas as outras proposições podem ser resolvidas da mesma maneira [i.e., silogisticamente], não apenas as de Euclides, mas também as dos outros matemáticos. Os matemáticos costumam negligenciar essa resolução em suas demonstrações porque podem demonstrar de forma mais curta e fácil o que é proposto, como fica claro na demonstração acima[358].

A suposta ortodoxia epistemológica do aristotelismo jesuíta tinha cada vez menos respaldo na Itália — em Pádua, mais especificamente, estava à beira da extinção. O texto de Biancani, que nem mesmo conseguia mais lecionar naquela cidade, foi o canto do cisne daquela tradição[359]. Contra Piccolomini, Perera e os conimbricenses, Biancani defende haver nas matemáticas demonstrações perfeitas (*demonstratio potissima*), as quais dizem tanto que algo é, quanto o porquê-algo-é. Tais demonstrações são também causais, procedendo por causa formal (definições) e causa material (mereológica). As conexões causais nem sempre são vislumbradas nos argumentos ordinários dos matemáticos, posto que procedem por entimemas, mas é possível expressar a causalidade através da redução silogística, sob um entendimento lato do que seja um silogismo. À diferença de Lassalle Casanave & Panza, porém, Biancani considera que as demonstrações matemáticas são exclusivamente discursivas, linguísticas, portanto. Daí se segue a rejeição à imaginação como faculdade das matemáticas, uma tese até então minoritária.

Biancani não foi o único a introduzir os entimemas como forma de diferenciar os argumentos reais dos matemáticos daqueles ideais estudados pelos filósofos no contexto da *quaestio de certudine mathematicarum*. Tampouco é dele o tratamento mais radical das

---

[358] Clávio, *Opera Mathematica*, Tomo I, *In Euclidis Elementa Geometrica*, 1612, p 28: Non aliter resolui poterunt omnes alia propositiones, non solum Euclidis, verum etiam cæterorum Mathematicorum. Negligunt tamen Mathematici resolutionem istam in suis demonftrationibus, eo quod breuius, ac facilius sine ea demonstrent id, quod proponitur, vt perspicuum esse potest ex superiori demonstratione.

[359] O texto de Biancani foi bem recebido, sendo elogiado por Mersenne e Isaac Barrow; Pierre Bayle o menciona no *Dictionarie* (ver a entrada Zenão). Vide Mancosu, *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century.* Oxford, 1996. p. 19.

demonstrações euclidianas. Como já ressaltado, as conexões entre as defesas de Clávio e Biancani, de um lado, e perfil institucional e filosófico da Companhia de Jesus, de outro lado, não devem ser desconsideradas. Contudo, é um erro pensar que a herança escolástica obrigou esses autores a amarrar a prática matemática euclidiana a uma Cama de Procusto, ou a uma camisa de força[360], em uma analogia à apresentação silogística das demonstrações. Ambos sabiam que os argumentos de Euclides não estavam na forma silogística e que, desde um ponto de vista da prática matemática, a explicitação dessa forma lógica era negligenciável. Tal como um orador, o matemático pode usar argumentos abreviados. Como será mostrado no próximo capítulo, porém, o reconhecimento do caráter entimemático das demonstrações euclidianas não conduziu esses autores a uma defesa sistemática de uma abordagem retórica à matemática.

5.8. Observações finais

O propósito deste capítulo foi mostrar que as conexões entre a lógica e a prática matemática é um fenômeno relativamente mais recente do que pode parecer. Embora Proclus e Filopono tenham tentado mostrar que os *Elementos* de Euclides poderia ser compatível aos requisitos lógicos e epistêmicos dos *Segundos analíticos*, é a partir do século XVI que esse projeto é levado a termo. A *quaestio de certitudine mathematicarum* foi um esforço de Piccolomini em preservar os alicerces do aristotelismo ao estabelecer a lógica como *a* ferramenta da investigação científica. Por ironia do destino, sua tese alimentou investidas céticas contra o conhecimento matemático, arrastando-o para a polêmica como cúmplice.

Foram reunidos aqui as respostas de Clávio e Biancani. Para Clávio, o desafio posto por Piccolomini sobre a natureza causal das demonstrações matemáticas tinha um peso extra, pois poderia desafiar a posição da geometria dentro do currículo jesuíta. O padre jesuíta atuou diretamente pela inclusão de Euclides, Teodósio e Sacrobosco na *Ratio Studiorum*, a principal referência da organização curricular dos saberes na Sociedade de Jesus na direção da uniformidade e solidez doutrinária (*uniformitas et soliditas doctrinae*). A disputa sobre a certeza matemática parece revelar também, incidentalmente, o clima intelectual no Colégio Romano, onde Clávio lecionou, pois a influência relativa do padre jesuíta diminuiu a cada novo rascunho da *Ratio*: da explícita recomendação de sua tradução dos *Elementos*, no texto de 1586, até a completa omissão a seu nome, na versão definitiva de 1599,

[360] Peter Dear, *Discipline and Experience: The Mathematical Way in the Scientific Revolution*. Chicago: University of Chicago Press, 1995, p. 146.

Apesar da adesão ao modelo clássico de ciência, Clávio e Biancani concordam em que, ordinariamente, os matemáticos não explicitam a forma lógica de seus argumentos. Busca-se, na maioria das vezes, a brevidade. É em resposta ao desafio de Piccolomini que esses autores concebem as demonstrações euclidianas como entimemáticas. Ressaltamos, porém, que embora esses autores não tenham manifestado objeções aos diagramas — na verdade as reconstruções silogísticas pressupõem a presença desses artefatos —, todos concebiam as demonstrações como objetos discursivos, independentemente de expressar ou não conteúdos mentais.

6. Retórica, matemática e a reforma axiomática dos *Elementos*

6.1. Resumo do capítulo

Clávio e Biancani entendiam que os matemáticos tipicamente procedem através de argumentos linguisticamente incompletos. Para Biancani esses argumentos não seriam senão os entimemas. Mas, ao contrário de Lassalle Casanave & Panza, esses autores não pensavam na arte retórica, tampouco consideravam que uma demonstração matemática poderia ser dependente da audiência. Para Clávio e Biancani, toda demonstração poderia ser reduzida a um silogismo típico de primeira figura. Como já antecipamos, a aproximação entre retórica e matemática fora proposta décadas antes por Jacques Peletier du Mans. Peletier foi o primeiro crítico moderno do método de sobreposição usado por Euclides em três ocasiões nos *Elementos*; e ele adota uma perspectiva retórica para explicar o porquê esse método ter sido usado.

6.2. Introdução

Apesar da crítica dos humanistas à lógica aristotélica, a epistemologia da matemática no século XVI ainda reconhecia a definição tradicional de demonstração como um tipo de silogismo. Alessandro Piccolomini, que pretendeu oferecer uma réplica favorável a Aristóteles, questionou a possibilidade da matemática, mais especificamente a geometria, de satisfazer alguns dos requisitos do modelo clássico, apesar de reconhecer que algumas demonstrações euclidianas poderiam ser reconstruídas silogisticamente. Clávio e Biancani concordavam quanto à possibilidade de se reconstruir as demonstrações euclidianas silogisticamente. Não obstante o compromisso institucional com o aristotelismo escolástico, eles entendiam também que o raciocínio matemático é, na prática, entimemático. O erro de Piccolomini teria sido não perceber esse recurso argumentativo.

Apesar do reconhecimento de que a prática matemática pode fazer, e geralmente faz, uso de entimemas, poucos autores ousaram abordar o conhecimento geométrico desde um ponto de vista retórico. Há duas exceções notáveis: os franceses Petrus Ramus (Pierre La Ramé) e Jacques Peletier du Mans. Ambos deixam comentários sobre os *Elementos*. No caso de Peletier, nota-se uma clara predileção por Cícero e Quintiliano; e junto a isso, um esforço de fazer da retórica uma alternativa metodológica dentro da matemática.

Ao longo dos anos, Peletier e Clávio se envolveram em várias disputas concernentes à matemática, especialmente quanto à natureza dos objetos geométricos. Eles também estiveram em lados opostos quanto ao uso do método da sobreposição nos *Elementos*. Para Peletier, a sobreposição é um método mecânico e, portanto, não genuinamente geométrico. A congruência entre figuras deveria ser regulada com a introdução de novos princípios. Apesar do problema da sobreposição ter sido parcialmente ignorado por Proclus, Peletier não foi o primeiro a tratar do tema. Sabe-se que entre os séculos IX e XIII, os matemáticos e comentadores da obra euclidiana Thabit Ibn Qurra (c. 830 - 901), Alhazen (Ḥasan Ibn al-Haytham, 965 – c. 1040) e Nasir al-Din al-Tusi (1201 - 1274) se debruçaram sobre esse tema[361]. O pioneirismo de Peletier reside no fato dele ter sido um dos primeiros matemáticos a rejeitar a sobreposição como método geométrico; e foi também o primeiro a propor o uso de I.4 como um princípio. Essa tese seria resgatada nos séculos XIX e XX com Bolzano, Pasch, Hilbert e Russell.

Peletier estava em minoria, porém. Suas objeções a Euclides foram respondidas por Clávio, com quem sempre travou batalhas intelectuais. Para o matemático jesuíta, o movimento pressuposto pela sobreposição deveria ser atribuído à imaginação. Não se poderia acusar Euclides de algo que ele não faz, a saber, mover uma figura física de um lugar para outro. Mas esse movimento imaginativo, baseado na doutrina do fluxo do ponto, como logo esclareceremos, não fora negado por Peletier, fato que nem mesmo a literatura contemporânea parece ter notado. Seja como for, a réplica de Clávio acabaria ganhando a adesão de um maior número de matemáticos, como Biancani, Claude Richard, Petrus Ramus, Henry de Servile, Isaac Barrow e Borelli.

A seção 2 discute o método da sobreposição usado por Euclides. Será uma oportunidade de retomar as objeções platônicas ao recurso a métodos mecânicos em raciocínios geométricos como maneira de aprofundamento de observações feitas já no capítulo 2. A seção 3 expõe as objeções de Jacques Peletier e discute a maneira como ele usa a retórica para estudar a prática matemática. Mostra-se também que apesar de rejeitar a sobreposição, Peletier não era contra todo tipo de movimento na geometria, tal como Clávio o acusou. A seção 4 expõe a réplica de Clávio e Biancani. De particular importância será o estudo da maneira como ambos entendem o conceito de *phantasia* dentro da geometria. Em antecipação a Descartes, mas sem ir muito além de Francesco Patrizi, sobre o qual falaremos

[361] Sobre a transmissão do conhecimento grego ao mundo muçulmano, ver Introdução, n. 41.

no próximo capítulo, Biancani rejeita esse conceito em favor da definição homogênea de demonstração defendida por ele. O debate a respeito da sobreposição se estende pelo século XVII, como mostramos na seção 5, onde são estudados os argumentos de Henry Savile e Isaac Barrow. O texto de Barrow, ao qual acrescentamos o de Boreli, nos permite retomar o estudo dos entimemas.

6.3. Sobreposição e congruência de figuras

Euclides usa o método de sobreposição (ἐφάρμοσις) como critério de congruência de figuras planas apenas em três proposições: I.4, I.8 e III.24. Não há nos *Elementos* regra explícita sobre como esse método deveria ser usado, razão pela qual Heath conjectura que talvez o próprio Euclides não considerasse a sobreposição um recurso genuinamente geométrico[362]. Soma-se a isso o fato de Euclides não usar a sobreposição em demonstrações similares, como I.26, onde também estabelece um critério de congruência de triângulos. Ora, sobrepor pressupõe um tipo de deslocamento; portanto, um tipo de movimento. Mas, como visto, tanto Platão quanto Aristóteles se opunham ao uso de movimento em demonstrações geométricas. Pareceria, então, que Euclides usou a sobreposição apenas por não ter alternativa; e reduziu o quanto pôde a sua ocorrência.

Deve-se notar, em primeiro lugar, que Euclides não trata como equivalentes semânticos a igualdade e o que modernamente se chama congruência. A Noção comum 4 diz que coisas que coincidem são iguais, i.e., são congruentes. Em I.4 (Figura 11) fica demonstrada a proposição conversa, a saber, coisas que são iguais coincidem. Essa demonstração estabelece o primeiro critério de igualdade de triângulos: lado-ângulo-lado[363]. Euclides procede da seguinte maneira. Dados dois triângulos iguais, *ABC* e *DEF*, dos quais os lados *AB* e *AC* são iguais aos lados *DE* e *DF*, cada um a cada um, e esses lados compreendem ângulos iguais, a saber, *BAC* e *EDF*; caso o triângulo *ABC* seja ajustado (Ἐφαρμοζομένου) ao *DEF*, então demonstra-se que são iguais, i.e., congruentes, os segmentos *BC* e *EF*, os triângulos *ABC* e *DEF* e os ângulos restantes, quais sejam: *ABC* ao *DEF* e *ACD* ao *DFE*. A única observação digna de nota feita por Proclus é o fato de Euclides supostamente ter assumido, “tacitamente”, como diz o comentador, que duas retas não encerram um espaço[364].

---

[362] Heath, *The Thirteen Books of the Elements*. Cambridge, 1908, p. 225. Ver também Hartshorne, *Euclid and beyond*, 2001, p. 33, 148-158.
[363] São três teoremas sobre igualdade (congruência) de triângulos no Livro I: I.4, I.8 e I.26.
[364] Ver Euclides, *Elementos*, XI.3 e XI.7.

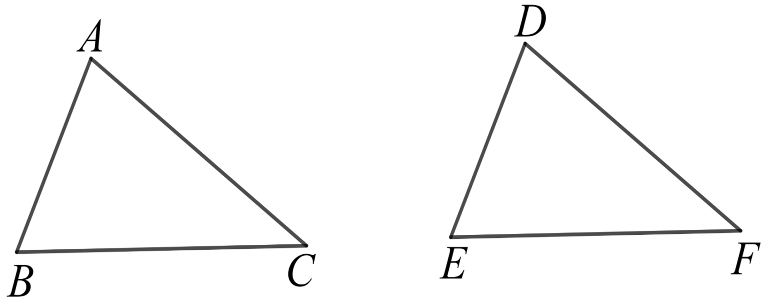

Figura 11: diagramas correspondentes à Proposição I.4

Em 1.8 (Figura 12) é estabelecido o segundo critério de igualdade de triângulos: lado-lado-ângulo. Dados dois triângulos, *ABC* e *DEF*, dos quais são verificadas as seguintes igualdades dos lados: *AB* ao *DE*, *AC* ao *DF* e (as bases) *BC* ao *EF*. Logo, os ângulos são iguais.

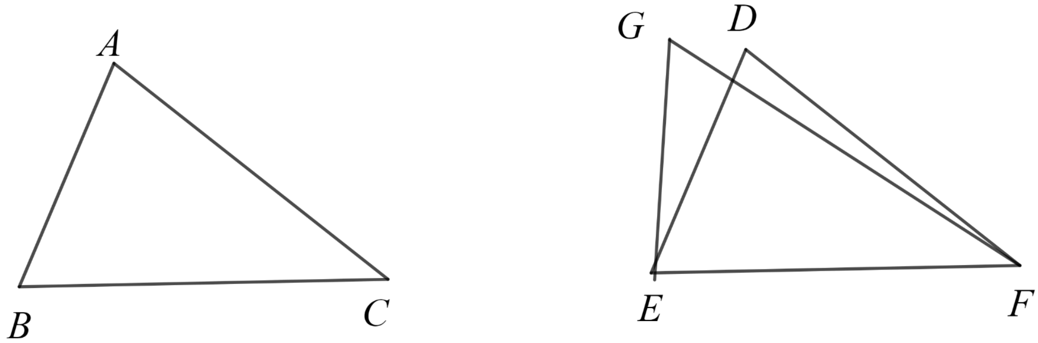

Figura 12: diagramas correspondentes à Proposição I.8

A última ocorrência do método da sobreposição está em III.24[365] (Figura 13). Sejam os segmentos semelhantes de círculo *AEB* e *CFD*. Caso o segmento retilíneo *AB*, por sobreposição, seja ajustado ao *CD*, e ambos são iguais, então ou *AEB* e *CFD* se ajustarão, o que era preciso demonstrar; ou *AEB* cairá no interior de *CFD*, o que seria uma contradição, posto que os segmentos são semelhantes; ou *AEB* cairá muito além de *CFD*, em cujo caso dois círculos se cortariam em mais de dois pontos, o que já foi demonstrado ser impossível[366].

[365] Euclides, *Elementos,* III.24: os segmentos semelhantes de círculos sobre retas iguais são iguais entre si.
[366] Euclides, *Elementos*, III.10: um círculo não corta um círculo em mais do que dois pontos.

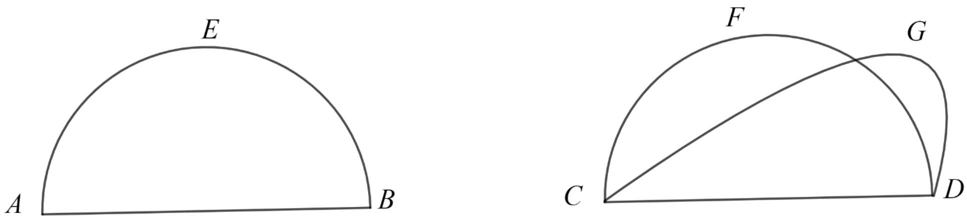

Figura 13: diagramas correspondentes à Proposição III.24

O movimento pressuposto pelo método da sobreposição não é trivial. As relações e propriedades métricas que o segmento ou a figura transladada mantêm entre si devem ser preservadas durante toda a mudança. Trata-se de um *movimento rígido*, i.e., um movimento sem deformação. Percebe-se melhor essa dificuldade quando se nota que Euclides não estabelece nenhuma "direção" para a qual a figura deveria ir, a despeito da maneira como os diagramas sugerem que o deslocamento ocorre apenas horizontalmente. Que Euclides não tenha se dado ao trabalho de considerar tais circunstâncias apenas reforça que há nos *Elementos* uma pressuposição de homogeneidade do plano[367]. (Como logo veremos, esse era o caso de todos os autores modernos aqui considerados.) Por outro lado, objetos físicos não podem satisfazer essa exigência métrica. Portanto, ainda que o plano seja homogêneo, a congruência pretendida não seria estabelecida por meios mecânicos.

Procus não considerava a sobreposição um recurso ilegítimo dentro da geometria euclidiana. Nota-se isso na demonstração que ele oferece do Postulado 4. Euclides não foi o único a usar o método da sobreposição na Antiguidade, como se pode inferir a partir das menções de Platão[368] e Aristóteles[369]. Arquimedes faz uso desse método em várias ocasiões, além de assumir os critérios euclidianos que dependem da sobreposição[370]. Segundo conjectura Beppo Levi, após o século III a.C., os geômetras teriam começado a se afastar cada vez mais de um ideal de conhecimento abstraído da realidade física[371]. Se esse fosse o caso, Euclides não teria limitado o método da sobreposição, como já notamos. Além disso, pode-se

[367] Bertrand Russell discute as dificuldades da suposição da homogeneidade do espaço nos *Elementos*, especialmente em I.4, em *An Essay on the Foundations of Geometry*, 1897, §§143-157.
[368] Platão, *Timeu*, 54B e seguintes.
[369] Aristóteles, *De caelo,* III.1, 299b. Convém lembrar que Aristóteles rejeita a possibilidade do movimento matemático. Veja-se *Física*, II.2, 193b34; *Metafísica,* 989b32 e 1064a30. Sobre a legitimidade do uso da matemática para descrição de movimentos físicos, ver *Física,* V.4, 228b25.
[370] Ver Arquimedes, *De planorum aequilibriis*, Livro I, Postulado 4, Proposições I.9-10; *De Corporibus Fluitantibus*, II.9
[371] Beppo Levi, *Lendo Euclides,* Rio de Janeiro, 2008, p. 118.

usar o testemunho de Pappus como evidência de que os matemáticos ainda tinham ressalvas sobre considerar argumentos empíricos como demonstrações matemáticas genuínas.

Autores contemporâneos optaram por fazer de I.4 um axioma. O caso mais conhecido é o método axiomático-formal de Hilbert, no qual o Grupo IV de axiomas trata da congruência entre vários tipos de objetos. Bernard Bolzano, por exemplo, apresentou uma demonstração alternativa de I.4 a partir de uma nova definição de ângulo. Essa demonstração é precedida por críticas à introdução do movimento na geometria. Bertrand Russell, por sua vez, havia argumentado que I.4 deveria ser um postulado geométrico, não um teorema. Após ter visto os novos sistemas axiomáticos de Pasch e Hilbert, Russell reforçaria as críticas ao método euclidiano de sobreposição. Diz ele, com efeito, que Euclides comete uma falácia ao dizer que o triângulo *ABC* foi movido até o *DCE*.

> O aparente uso do movimento é enganoso; o que, na geometria, é chamado de movimento, é apenas a transferência da nossa atenção de uma figura ou conjunto de elementos [da figura] para outro. A sobreposição real, que é nominalmente empregada por Euclides, não é necessária; tudo o que é necessário é a transferência da atenção da figura original para uma nova, definida pela posição de alguns de seus elementos e por certas propriedades que ela compartilha com a figura original[372].

Uma terceira discussão aparece em *Principles of Mathematics*. Desta vez, contudo, Russell parece ter ponderado as objeções que havia apresentado ao movimento, reconhecendo que para o geômetra o movimento tem outro significado.

Que se tenha notícia, Sexto Empírico foi o único filósofo na Antiguidade a apresentar objeções ao uso da sobreposição. Ocorre que o alvo dessa crítica não é o movimento pressuposto pelos geômetras, mas antes a própria possibilidade de se sobrepor dois corpos. Esse tema também não passou despercebido a alguns comentadores durante a Idade Média. Os matemáticos e comentadores da obra euclidiana, Thābit Ibn Qurra[373], Ibn al-Haytham e al-Ṭūsī[374] consideravam que a sobreposição implicava algum tipo de movimento. Recentemente, Ruth Glasner & Avinoam Baraness chamaram atenção para o matemático Alfonso de Valladolid, que viveu no século XIV, e tentou fundamentar uma

---

[372] Russell, Geometry, Non-Euclidean. In id, Toward the "Principles of mathematics", New York, 1993, p. 496. Esse livro, editado por Gregory H. Moore, corresponde ao Vol. III de The Collected Papers of Bertrand Russell. Esse artigo foi publicado originalmente na 10ª edição da Encyclopaedia Britannica, 28:664-74, 1902.

[373] Sabra A.I., Thābit Ibn Qurra on Euclid's Parallels Postulate. *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*, 31, p. 19-20, 1968; Jaouiche K. 1986. *La théorie des parallèles en pays d'islam*. Paris, p. 151; Rashed R. & Houzel C. 2005, "Thābit Ibn Qurra et la théorie des paralléles", *Arabic Sciences and Philosophy* 15, pp. 43-46.

[374] Sobre Ibn al-Haytham e al-Ṭūsī, ver Roshdi Rashed, *Angles et Grandeur: D'Euclide à Kamāl al-Dīn l-Fārisī*. Berlim, 2015, p. 439-455.

geometria ao estilo euclidiano a partir dos conceitos de movimento e sobreposição[375] a partir do conhecimento que tinha desses textos árabes e persa. Vale notar que nenhum desses autores chegou a rejeitar o Postulado 4 nem as demonstrações I.4, I.8 e III.24. No caso de al-Ṭūsī e Afonso, mais especificamente, eles consideram que a Noção Comum 4 deveria aplicar-se à figura como um todo. Ou seja, a mudança deveria ocorrer de toda a figura e de uma só vez.

Todavia, o precedente histórico de Bolzano, Hilbert e Russell quanto ao problema da sobreposição é o comentário de Jacques Peletier du Mans (1517 – 1582) aos *Elementos* de Euclides em 1557. Tal como esses matemáticos, Peletier entendia que I.4 exigia algum tipo de movimento incompatível com a geometria e que, por isso, deveria ser expurgado. Não se sabe ao certo o quão inteirado ele estava da literatura árabe e persa àquela altura, especialmente por predileção pelos clássicos gregos. Seja como for, o que destaca Peletier dentre os autores mencionados é a maneira como ele vislumbrou uma abordagem retórica ao conhecimento matemático, mais especificamente à álgebra, ao invés de apelar para algum tipo de análise lógica, o que seguramente era uma possibilidade.

6.4. As objeções de Jacques Peletier

A tradução dos *Elementos* feita por Peletier baseia-se no sistema axiomático presente nas traduções de Valla e Zamberti[376]. Peletier foi um importante divulgador do conhecimento matemático na França[377]. Ele foi diretor no Collège de Bayeux (Paris, 1543-1547), no Collège d'Aquitaine (Bordeaux, 1572), e no Collège du Mans (Paris, aprox. 1578); foi professor de matemática na Universidade de Poitiers em 1579[378]. Peletier escreveu

---

[375] Nascido judeu com o nome Abner de Burgos, Alfonso viveu toda sua vida no reino de Castela e Letão, Espanha, bem longe, portanto, do epicentro da Renascença. Isso explica, em parte, por que seu nome não é citado por nenhum matemático nos séculos XVI e XVII que discutiram a sobreposição euclidiana. Ver R. Glasner & A. Baraness, *Alfonso's Rectifying the Curved A Fourteenth-Century Hebrew Geometrical-Philosophical Treatise*. Switzerland, 2020.

[376] In *Euclidis Elementa Geometrica Demonstrationum Libri sex,* Lyon, Tornes, 1557. Em 1573 é publicada nova tradução dos *Elementos*, desta feita contemplando os Livros I-XV: *Euclidis Elementorum Libri XV. Graece et Latine Quibuscum ad omnem Mathematicae scientiae partem, tum ad quamlibet Geometriae tractationem facilis comparatur aditus.* Paris, Marnef et Cavellat, 1573. Peletier usou como referência a versão de seu antigo professor, Oronce Fine (1494 - 1555), *In sex priores libros geometricorum elementorum Euclidis Megarensis demonstrationes*, Paris, Simon de Colines, 1536. Fine também usa o sistema de Zamberti. Esse texto foi reimpresso em 1544 e 1551.

[377] Além de matemático, Peletier também foi poeta, tendo começado com as publicações de suas traduções de Horácio e Homero.

[378] A propósito desse último fato, veja-se *Jacobi Peletarii Medici et Mathematici Oratio Pictavii habita in praelectiones Mathematicas.* Pictavii, ex officina Bochetorum, 1579.

ainda sobre aritmética[379], geometria prática[380], e álgebra, a "parte oculta dos números"[381]. Peletier não hesita em criticar a organização dos *Elementos*. Por exemplo, ele considera que o Postulado das Paralelas não deveria estar entre os postulados, mas sim entre as definições. No entanto, Peletier é mais conhecido por ter sido o primeiro a apresentar objeções ao método da sobreposição usado por Euclides em I.4, I.8 e III.24[382].

As objeções de Peletier são bem parecidas com as que seriam apresentadas contra Euclides a partir do século XIX. De fato, para ele não são consideradas demonstrações genuínas aquelas onde se faz uso do método da sobreposição. Segundo ele, se tal método fosse admitido, então qualquer proposição relativa a transposição de segmentos retilíneos poderia ser feita do mesmo modo. Por exemplo, em vez de usar o Postulado 3 nas primeiras proposições, Euclides poderia simplesmente ter "ajustado" o segmento no local exigido. "O que diremos, então", questiona ele, "para defender Euclides de repreensão? Porque parece que não se pode confirmar [i.e., demonstrar] este teorema com tão poucas proposições que ele apresentou"[383]. A solução de Peletier, que viria a ser adotada por Russell e Hilbert, era transformar a Proposição I.4 em um princípio. Mas, ao invés de considerar essa proposição como um novo postulado, ele preferiu considerá-la como uma definição.

Uma outra razão para se rejeitar o método da sobreposição, ainda segundo Peletier, é sua suposta natureza mecânica, constatação essa que teria escapado aos comentadores de Euclides, até mesmo Proclus. (Como já mencionado, esse tema foi discutido por autores árabes durante a Idade Média.) Diz ele: "Portanto, buscaremos a verdade desta proposição de nenhuma outra fonte além do julgamento comum: consideraremos sobrepor figuras a outras figuras como algo mecânico, mas, o inteligir, isso é verdadeiramente matemático"[384].

---

[379] *Arithmeticae practicae methodus facilis, per Gemmam Frisium, Medicum et Mathematicum. Hue accesserunt Jacobi Peletarii Cenomani annotationes. Ejusdem item de Fractionibus Astronomicis Compendium et de cognoscendis per memoriam Calendis, Idib. Nonis, Festis mobilibus a Loco Solis et Lunae in Zodiaco.* Parisiis. Apud Joan. Lodoicum Tiletanum, ex adverse Collegii Remensis, 1545; *L'Arithmétique départie en quatre livres*. Poictiers, au Pélican, le 12 février, 1548; *L'Arithmétique de Jacques Peletier du Mans départie en quatre livres à Théodore Debesze*. A Poictiers, chez les Marnefs, 1549.

[380] *Jacobi Peletarii de usu Geometriae liber unus. Paris, Gourbin; De l'usage de Géométrie, par Jaques Peletier, Médecin et Mathématicien. A Très illustre Seigneur Messire Albert Degondy, Comte de Rets*. Paris, Gourbin, 1573.

[381] *L'Algèbre de Jaques Peletier du Mans, départie an deus livres. A Très illustre seigneur Charles De Cessé, maréchal de France*. A Lion, par Jan de Tournes, 1554; De occulta parte numerorum quam Algebram vocant. Ad Joannem Capellanum. Libri duo. Paris, 1560.

[382] Heath, *The Thirteen Books of the Elements*, Cambridge, 1908, p. 249; Bernard Vitrac (Ed.), *Les Éléments*, Paris, 1990-2001, vol. 1, p. 50.

[383] Quid ergo huc afferemus, vt Euclidem à reprehensione vindicemus? Neque enim ex tam paucis quas hactenus præmifit, Propofitionibus, hoc Theorema confirmari posse videtur.

[384] Huius itaque Propofitionis veritatem non aliunde quàm à communi iudicio petemus: cogitabimusq Figuras Figuris superponere, Mechanicum quippiam esse; intelligere verò, id demùm esse Mathematicum.

À primeira vista, a crítica de Peletier tem como alvo o movimento pressuposto na sobreposição. Esse é o entendimento de Heath, Knorr e Mancosu[385]. Porém, a crítica principal recai sobre o fato de Euclides não ter introduzido previamente nenhum tipo de princípio que permitisse a sobreposição. De fato, logo no comentário às Definições I.1-2 e 4, Peletier subscreve sem ressalvas à tese segundo a qual a linha é gerada pelo fluxo contínuo do ponto e, portanto, não é constituída pela soma de infinitos pontos[386]; a superfície, por sua vez, é gerada pela prolongação contínua da linha[387]. Veja-se o que ele tem a dizer na Definição I.1: "Do contínuo fluxo do ponto para o comprimento, compreende-se o surgimento da linha" (*Ex Puncti fluxu perpetuo in longum, gigni intelligitur Linea*). O ponto geométrico encontra-se na origem de tudo. Ainda em I.1, Peletier evoca os nomes de Platão (através de Proclus) e Epicuro. Diz ele:

> Platão chama de substância ou subsistência dos pontos adamantina, isto é, eterna, estável, incorruptível, que sempre mantém a mesma forma: o universo gira ao seu redor e se move em aplauso por toda parte. Esses são os átomos de Epicuro, as sementes de todas as coisas[388].

Além disso, Peletier enxerga uma ligação entre a definição de círculo em I.15 e a definição de esfera em XI.14, onde Euclides explicitamente faz alusão a uma espécie de movimento. Diz ele:

> Círculo é uma figura plana, composta por uma única linha chamada de periferia, em torno da qual todas as linhas estendidas a partir de um ponto interior são iguais [Definição I.15]. Esse ponto interior é chamado de centro. Essa definição é muito conhecida, pois expressa a sua característica ou, como dizem, a sua "paixão". No entanto, se alguém desejar uma explicação sobre como um círculo é realmente formado ou criado, semelhante à definição de esfera que Euclides apresentará no Livro XI, ela será a seguinte: círculo é a trajetória de uma linha reta [*vestigium lineae rectae*] traçada em um plano, com um dos extremos mantido fixo, até que a linha reta retorne ao ponto de onde começou[389].

---

[385] Mancosu, *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, Oxford, 1996, 28-33

[386] I.2: Non igitur ficut ex accumulatis Vnitatibus fit Numerus fic ex additis Punctis sit Linea sed ex ipsorum fluxu continuo.

[387] I.4: Ac quemadmodum ex Puncti fluxu in continuum, exit Linea ita ex Lineæ: in tranfuerfum ductu, oritur Superficies. Quæ fic definitur.

[388]Plato Punctorum hypostasin seu subsistentiam vocat adamantinam: nempe aeternam, stabilem, incorruptibilem, quaeque eodem semper modo habeat: Universum circa ipsa converti, ac circunquaque in plausum moveri. Eae sunt Epicuri Atomi, omnium rerum semina. A respeito da menção a Platão, ver *Timeu*, 40C. A respeito das possível influência do atomismo de Epicuro, ver Definição I.5: "Assim, os pontos são átomos: as linhas são matéria: as superfícies são forma. E destes, o corpo, que é longo, largo e espesso" (*Puncta igitur, atomi sunt: Lineae materia: Superficies forma. Atque ex his Corpus, quod longum, latum, & crassum est.*)

[389] Circulus, est Figura plana, una linea contenta quae Peripheria appellatur: ad quam ab uno puncto introrsùm existente omnes porrectae lineae sunt aequales. Punctum autem illud, Centrum Circuli vocatur. Haec Circuli definitio notissima est: quae ipsius affectionem, seu, ut dicunt, passionem explicat. Siquis verò factionem seu

Como se nota, o problema não está na introdução de movimento na geometria, mas antes na necessária separação entre movimento *genuinamente* geométrico e movimento cinemático ou mecânico, o qual se poderia fazer com régua e compasso ou qualquer outro instrumento de mensuração.

Peletier oferece uma perspectiva retórica ao método de sobreposição. Peletier nota que I.4, por ser o primeiro teorema dos *Elementos*, segundo a terminologia de Proclus, deveria ser muito óbvia para que a audiência acompanhasse. Por essa razão, poder-se-ia demonstrar algo que é assumido como um princípio. Viu-se que esse era o entendimento de Proclus acerca dos princípios euclidianos, mais precisamente os postulados. Além disso, Peletier também diz que uma teoria matemática deveria ter poucos princípios e Euclides teria omitido muitos desses princípios (*multa Principia consultò supprimuntur*)[390]. Essa supressão deliberada é uma possibilidade já antecipada no prefácio. Diz Peletier:

> Os dialéticos chamam de demonstração um silogismo que nos permite saber, ou seja, que conclui com base no mais bem provado. E isso tem origem na Geometria. Na verdade, toda prova que leva à verdade é Geométrica. Foi muito bem dito que ninguém é capaz de distinguir verdade de falsidade sem estar familiarizado com Euclides. Se alguém investigar mais profundamente por que a forma do silogismo não é evidente ao demonstrar proposições, mas apenas partes concisas dos silogismos são aparentes, deve saber que isso ocorre porque é considerado impróprio observar fórmulas prescritas quando se trata de assuntos práticos, uma vez que chegamos ao cerne da questão. Assim como um orador não coloca em seus dedos o que lhe foi ditado por seu mestre de retórica quando vai ao fórum, senão age como se não estivesse pensando em retórica, apesar de ter lembrança perfeita do que lhe foi ensinado; da mesma forma, em um trabalho geométrico, quando tudo o que buscamos é atingir o objetivo com precisão, nós deixamos completamente de lado a forma do silogismo. No entanto, se alguém exigir isso, ela pode ser expressa vividamente a partir das provas geométricas. Mas nós deixamos de fora o que, ao ser repetido, não apenas seria tedioso, mas também obscureceria [o entendimento][391].

---

creationem Circuli sibi exponi petat, instar Definitionis Sphaerae quam Euclides libro undecimo daturus est: ea erit huiusmodi. Circulus, est vestigium lineae rectae in plano circunductae, altero extremorum manente fixo, donec ipsa unde duci coepit, redierit.

390 Peletier, *In Euclidis*, 1557, I.4, p. 16: "Paucis enim Principijs Geometriam contentam esse oportebat immò multa Principia consultò supprimuntur, ne sit onerofa multitudo ut etiam quæ exprimuntur tantùm ad exemplum exprimi uideantur. Hûc accedit, quod primum Theorema facile, perspicuum, ac sensui obuium esse debebat, pro Geometriæ lege, quæ ex paruis humilibusq initijs, in progressus mirabiles sese extollit".

391 Peletier, *In Euclidis*, 1557, p. 12: Demonftrationem verò appellant Dialeatici, Syllogismum qui faciat scire: nempè qui ex probatissimis concludat. Atque hæc a Geometria ortum habet. Immo omnis quæ ad verum perducit probatio Geometrica est. Ut verissimè dictum sit, neminem scire verum à falso distinguere cui, Euclides non fuerit familiaris. Quòd siquis attentius sciscitabitur, quur in Demonstrandis Propositionibus non eluceat forma Syllogismi, sed tantum concisa quædam membra Syllogismorum appareant is sic habeat, præter dignitatem esse, quæ in scholis docentur, ea quum in rem præsentem uentum sit, ex præscriptis formulis obferuare. Neque enim Orator, quum ad forum accedit quæ à Rhetore excepit dictata, in digitis collocat immò id agit ut quum

Como já antecipado no Capítulo 4, Peletier tinha enorme interesse em se apropriar da retórica como um método científico. Sabe-se que ele não só era leitor de Cícero e Quintiliano, como também traduziu alguns exemplares clássicos, além de ter lecionado sobre esses temas[392]. Também não é novidade o fato de Peletier ter usado a retórica em seus escritos matemáticos. Ora, toda forma de escrita, diz ele, é composta pela invenção (ou descoberta), disposição e elocução[393]. Portanto, a demonstração matemática, que também deve ser codificada nalguma forma de escrita, poderia ser estudada sob esse prisma retórico. Em *Aritmetique*, diz ele:

> Por outro lado, aqueles que defendem a clareza e a familiaridade da escrita afirmam que a primeira virtude do aprendizado é a perspicuidade. Entre escritos claros e escritos obscuros, há tanta diferença quanto entre o dia e a noite, e que os aprendizes que enfrentam livros obscuros se assemelham àqueles que se aventuram por um caminho desconhecido. Estes últimos, depois de terem se perdido por muito tempo, ainda assim chegam ao lugar pretendido e se vangloriam de conhecer melhor as direções do que aqueles que chegaram ao mesmo lugar pelo caminho direto[394].

Ora, se o objetivo é a exposição clara do raciocínio, então os argumentos abreviados são preferíveis, visto que, através deles, a audiência chegaria à mesma

præceptorum maximè meminit, nihil minus quàm Rhetoricen cogitare videatur. Sic in opere Geometrico, quum nil aliud fpeciemus quàm ut scopum exquisitè assequamur: Syllogismi figuram omninò dissimulamus. Quæ tamen si exigatur, è probationibus Geometricis ad uiuum exprimitur. Sed nos ea resecamus, quæ repetita non modò tædium, sed etiam obscuritatem parerent.

392 Sobre a importância da retórica de Cícero durante o séc. XVI, ver Charles B. Schmitt, *Cicero Scepticus: A Study of the Influence of the Academica in the Renaissance* (especialmente o cap. 4).

393 Peletier, *L'Art poetique de Jacques Peletier du Mans. Départi an deus livres.* A Lyon. Par Jan de Tournes et Cuil. Gazeau, 1555, p. 19: Toutes sortes d'Ecriz s'acomplicet de troes parties principales, qui font Inuancion, Disposicion, Elocucion. Inuancion et un dessein prouenant de l'imaginacion de l'antandemant, pour paruenir a notre sin. Ele et repandue par tout le Poéme, comme le sang par le cars de l animal: de sorte qu'ele se peut apeler la vie on l'ame du Poeme. Disposicion et une ordonnance e ag'ansemant des chofes inuantees. E et cele qui donne la beaute e la dinite a tout le Poéme. Elocucion, que les Gréz apelet Frase, et une structure de moz e de clauses les unes auec les autres. C'et cele qui expose les concepcions de l'efprit e qui sert de trucheman aus deus sudites.

394 Peletier, *L' Arithmetique*, p. 27. De l autre part ceus qui foutienet la clerte e familiarite d Ecriture difet que la premiere vertu de lorefon c et la perfpicuite e quantre les ecriz clers e les ecriz obfcurs y à tele differance quil y à du jour a la nuit e que les apprantiz lifans les Liures obfcurs reffamblet ceus qui fe mettet an vn chemin inconnu lequez aprẹs s etre longuemant foruoyez e neantmoins étre paruenuz au lieu antrepris se vantet de mieus fauoèr les addreffes que ceus qui font arrivez au méme lieu par le chemin tout droẹt. Essa ideia aparece em *L'Art poetique,* ch. 9: "La premiere et plus digne vertu du Poème est la Clarité".

conclusão[395]. Não haveria, portanto, incompatibilidade entre brevidade e clareza[396]. E isso vale até mesmo para a matemática, apesar de ser mais difícil que outras disciplinas.

> Por essas razões, resolvi manter nesta minha Aritmética, e em todos os outros tratados que possa fazer doravante, um estilo o mais claro e fácil que possa imaginar. No entanto, devo confessar que, no campo das Matemáticas, não importa qual método se adote ou quanta luz se possa fornecer, elas sempre são um pouco difíceis em comparação com outras profissões. Pois, embora possam ser consideradas difíceis por natureza, essa dificuldade é mais uma questão de reputação do que de experiência real[397].

Portanto, o comentário aos *Elementos*, publicado uma década depois dessa passagem, seguiu esse entendimento sobre a aplicação retórica. E apesar de Peletier nunca usar a expressão *enthymema* em seus escritos, depreende-se que era a esse tipo de argumento que ele fez alusão quando disse que os geômetras podem suprimir deliberadamente alguns princípios durante a demonstração. O que se nota já nesse tratado é uma tentativa de fazer da retórica um novo método de investigação científica.

> No entanto, é muito provável que, embora muitos usem a aritmética extensivamente, não lhes seja fácil colocar prontamente a prática em forma de arte. Porque o caminho mais agradável e comum seguido pelos inventores não é organizar cada item em seu devido lugar, nem em uma ordem metódica, mas apenas conforme eles vêm ao espírito[398].

As interações entre as nações — Peletier escreve no contexto das grandes navegações de Portugal e Espanha — , bem como a conveniência e a necessidade servem de estímulo para que os homens criem estilos que organizam o conhecimento de maneira que seja útil a quem não pode se dedicar à teoria[399].

---

[395] *idem:* E a la verite nous voyons qu aujourd hui on à trouuè moyen dabbreger le tans aus Difciplines par clerte e facile maniere danfeigner Comme on peut voer de la Grammere Retorique Musique e autres profeßions Sus lequel debat n è vou lu du tout me ranger a l une des parties ni du tout a lautre einçoes è pris opinion de fuiure vn chemin metoyen.

[396] Idem: je trouue quil n et pas impossible d étre faci brief tout anfamble pouruu quon tie ne toujours fon addresse a la metode qui ét cele qui donne majefte aus Ecriz e non lob Scurite laquele ne doet ni peùt aucunemant étre defandue contre la facilite.

[397] A ces causes, me suis resolù de tenir an cete mienne Aritmetique, e an tous autres Trettez que pourrè fere desormęs, un trein le plus cler e le plus ese que pourrè imaginer: Combien quil faut confesser, quan matiere de Matematiques, quelque metode quon tiene, e quelque lumiere quon leur puisse donner: si sont elles toujours difficiles quelque peu au regard des autres profeßions. Car quelles soét si difficiles d'elles memes, c'ét plus une opinion de credit que dexperiance.

[398] Peletier, *L'Aritmetique,* 1549, 78v: Touteffoes il et bien vreyfamblable, que combien quiz antandissent beaucoup d'usages de l'Aritmetique, si et ce qu il ne leur était pas ese dan mettre prontemant la Prattique par art: Car la plus aggreable e coutumiere voge que tienet les Inuanteurs, net pas de cou cher chaque article an son propre lieu, ni an ordre metodique, mes seulemant einfi quiz leur vienet an l'esprit.

[399] Idem: Mes a la fin croeffans toujours les afferes e traffiques des nacions les vnes auec les autres la commodite e la neceßite qui ouuret les efpriz des hommes leur ont anfeigne a etablir vn stile quiz ont dispose par etat peu a

Peletier continua a desenvolver sua visão sobre a retórica no tratado matemático subsequente, *L' Algebre*, de 1554. Diz ele:

> O que no mundo é mais belo do que a ordem? Que benefício se pode obter da confusão? Em todos os trabalhos, o que o trabalhador pode usar se não é a forma? Não há nada na eloquência que seja do orador, exceto o que se chama disposição. Pois as palavras nem mesmo os pensamentos são da sua natureza. As palavras pertencem ao povo, os pensamentos às concepções universais dos filósofos. Que mérito há em um homem entender ou falar uma língua se ele não souber ajustar as palavras e vesti-las artificialmente de acordo com sua necessidade? Como ele as ajustará senão com julgamento? Onde está o julgamento senão na ordem? Não é nada mais do que ver as pedras, a cal e a areia, que têm a coisa de colocá-las em boa e conveniente disposição[400].

6.5. As réplicas de Clávio e Biancani

A resposta de Clávio aparece primeiramente no comentário ao *Da esfera*, de Teodósio, publicado em 1586[401]. Clávio objeta que Peletier, ao criticar o método da sobreposição, não compreendeu a diferença entre teoremas e problemas. A sobreposição nos *Elementos*, diz o matemático jesuíta, não é algo físico, mecânico, mas antes um ato mental que requer apenas intelecto e raciocínio[402]. A melhor evidência disso, continua Clávio, é que a sobreposição é um método usado apenas em teoremas, não em problemas.

> Isso é verdade nas proposições, mas não nos problemas. Nas proposições, devido à igualdade ou desigualdade das magnitudes, como se costuma indicar, o argumento desse tipo é facilmente compreendido pela mente de qualquer pessoa, sem qualquer hesitação, seja para afirmar que uma não excede a outra ou para conceber que uma é sobreposta à outra, mesmo que,

peu quand chacun à apporte fa part d inuancion au bureau pour foula ger ceus qui n auoét loefir de vaquer a la Teorique.

400 Peletier, *L' Algebre*, de 1554, f. 8: Car quy à il Monde plus beau que l ordre. Quel profit fe peut il rekeulhir dune confufion An tous ouurages quy à il que louurier fe puisse dúmant approprier si ce n et la forme Il n y a rien an lorefon qui foet de l Orateur fi ce nét ce qu on appelle la collocacion Car les moz ni même les fantances ne font point du fien Les moz font du Peuple Les fantances des concepcions vniuerfelles des Philofophes Quele louage appartient il a vn homme pour antandre ni pour parler vne Langue s il ne set accomoder les moz e les accoutrer artificiellemant a fon point ea fon besoin? Commant les accommodera il sinon auęc jugemant? An quoc git le jugemant, sinon an l ordonnance? Ce n et rien que uoèr les pierres la chau e le fable qui n a le choes de les mettre an bonne e conuenable afiete

401 Clávio, *Theodosii Tripolitæ Sphæricorum libri III a Christophoro Clavio Bambergensis Societatis Iesu perspicuis demonstrationibus ac scholijs illustrati*. D. Basa, Rome, 1586. A réplica é reproduzida verbatim na segunda edição de sua tradução dos *Elementos*, esta publicada em 1589. Em ambos os casos, o cerne da discussão, que envolve até mesmo acusações mútuas de plágio, é sobre o chamado ângulo de contato na Proposição III.16 de Euclides.

402 "Neq[ue] [enim] uolunt re ipsa facieda[m] esse superpositione (hoc [enim] mechanicu quid esset) sed cogitatione tantu, ac mē[n]te, quod opus est rationis atq[ue] intellectus" (Clávio, *Theodosii Tripolitæ Sphæricorum libri III a Christophoro Clavio Bambergensis Societatis Iesu perspicuis demonstrationibus ac scholijs illustrati*. D. Basa, Rome, 1586, p. 343.) Veja-se também *Id., Opera mathematica*, 1612, Tomo I, Comentário aos *Elementos,* III.16, p. 121.

> na realidade, essa sobreposição não ocorra, como foi feito na Proposição 4 do Livro I [dos *Elementos*]. Mas nos problemas, onde alguém é instruído a construir uma magnitude igual a outra, embora possa conceber mentalmente que a magnitude proposta seja transferida para outro lugar, isso não fará nada acontecer na realidade, já que a transferência real não ocorreu[403].

A proposta de Peletier de transformar I.4 em definição, portanto, seria uma pseudo-solução resultante da incompreensão do método demonstrativo euclidiano. Além disso, Clávio acusa a demonstração alternativa de Peletier de petição de princípio (*petitio principii*)[404].

Nos seus comentários aos *Elementos*, Clávio não estabelece critérios claros para diferenciar intelecto (e intelecção) e imaginação, conceito este que é apropriado da *phantasia* procleana. O resultado disso, tal como em Peletier, é a introdução da doutrina do fluxo do ponto. Nota-se isso, por exemplo, no comentário à Definição I.2:

> Os matemáticos, a fim de nos destacar uma compreensão verdadeira de uma linha, imaginam um ponto previamente definido movendo-se de um lugar para outro. Visto que um ponto é completamente indivisível, desse movimento imaginário resultará um rastro sem extensão, completamente destituído de largura[405].

A linha que os matemáticos concebem como fluxo imaginário do ponto (*Mathematici per fluxum puncti imaginarium concipiunt describi lineam*), diz Clávio na Definição I.4, é chamada reta se mantém um movimento uniforme e contínuo; se o fluxo do ponto descreve um movimento oscilante, então é uma curva; se o movimento descrito pelo fluxo do ponto não oscila e é uniforme em torno de um ponto fixo, então a linha é circular[406]. Por igual razão, do fluxo do ponto também resulta a definição de superfície (Definições I.5 e I.7) e sólido:

---

403 Itag in theorematib quidē locu habebit genus hoc argumetandi in problematibus vero non Namg in theorematib propter magnitudini aqualitate inequalitateue qua vt nota ponitur facile intellectus cuiufuis fine vlla hæfitatione cöprehedit vna vel non excedere altera vel excedere fi animo concipiatur vna alteri effe fuperpofita quauis re ipfa non fiat illa fuperpofitio vt in propof 4 lib 1 factu est At in problematib in quib magnitudině quis alteri aquale conftruere iubetur licet mente cogitet magnitudine propofita transferri in aliu locu non tamen propterea quicquam efficiet cum re ipfa translatio nulla facta fit.

404 Clávio, *Theodosii Tripolitæ Sphæricorum libri III a Christophoro Clavio Bambergensis Societatis Iesu perspicuis demonstrationibus ac scholijs illustrati*, Roma, 1586, p. 344; *In Euclidis Elementa Geometrica*, 1589, p. 121.

405 Mathematici quoque, ut nobis inculcent veram lineae intelligentiam, imaginantur punctum iam descriptum superiore definitione, è loco in locum moveri. Cum enim punctum sit prorsus individuum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum omnis expers latitudinis.

406 Si namque punctum rectà fluere concipiatur per brevis-simum spatium, ita ut neque in hanc partem, neque in illam deflectat, sed aequabilem quendam motum, atque incessum teneat, dicetur linea illa descripta, Recta: Si vero punctum fluens cogitetur in motu vacillare, atque hinc inde titubare, appellabitur linea descripta, mixta: Si denique punctum fluens in suo motu non vacillet, sed in orbem feratur uniformi quodam motu, atque distantia à certo aliquo puncto, circa quod fertur, vocabitur descripta illa linea, circularis.

> Da mesma forma, quando eles querem nos apresentar um corpo, ou seja, um sólido que possui três dimensões, eles nos aconselham a conceber a elevação uniforme de uma superfície ou seu movimento lateral; dessa forma, um rastro será traçado que é longo, amplo e profundo; longo e amplo devido à superfície que é extensa em comprimento e largura, e profundo devido à elevação ou movimento da superfície[407].

É também a partir da doutrina do fluxo do ponto que Clávio extrai seus comentários sobre os Postulados 1-3. Pois as operações chanceladas por tais princípios já estão contidas na Definição I.4. Ou seja, os postulados de construção são redutíveis às definições.

No cerne da réplica de Clávio está a doutrina do fluxo do ponto e o movimento da *phantasia*, ambas heranças de Proclus. Contudo, ainda que Clávio admita o movimento imaginativo na matemática, o uso de instrumentos ou meios mecânicos para transpor figuras é rejeitado por ele, tal qual o fora por Peletier. O que separa os dois matemáticos é o fato de Clávio considerar a sobreposição um recurso legítimo, o que tornaria dispensável a inclusão de quaisquer princípios de transposição e congruência nos *Elementos*.

Clávio decerto conhecia a abordagem retórica de Peletier às matemáticas, mas nunca lhe fez objeções a esse respeito. Pode-se atribuir isso ao entendimento de Clávio sobre a maneira como os matemáticos tipicamente argumentam, privilegiando a brevidade em detrimento do rigor da silogística. Não deixa de ser estranho, por isso, que nenhum dos dois mencione os entimemas em suas reflexões sobre o método da sobreposição. Ao voltarmos nossas atenções para Biancani, que de fato falou que os matemáticos procedem por entimemas, percebe-se um distanciamento em relação a Clávio a respeito da imaginação.

A propósito das réplicas que apresentou a Piccolomini no âmbito na *quaestio de certitudine mathematicarum*, Giuseppe Biancani também se manifesta sobre o método da sobreposição de Euclides. Apesar de não criticar Euclides diretamente, Biancani adota um tom mais parecido ao de Peletier do que o do velho mestre Clávio. Ele nota, em primeiro lugar, que a sobreposição é usada apenas três vezes nos *Elementos*. Mas, olhando com atenção, esse procedimento seria tão perfeito e evidente quanto todos os outros (*[demonstrationes per superpositionem] eas esse tam perfectas ac euidentes quam reliquæ.*). Diz ele:

> Isso, de fato, é tão claro e evidente quanto as outras [proposições]. Aqueles que pensam que essa superposição é o meio da demonstração estão

[407] Definição XI.1: “Ita quoque, ut nobis ob oculos ponantcorpus, seu solidum, hoc est, quantitatem trina dimensione praeditum, consulunt, ut concipiamussuperficiem aliquam aequaliter elevari, sive in transversum moveri; hac enim ratione describetur vestigium quoddam longum, latum, atque profundum; longum quidem et latum, ob superficiem, quae longa et lata existit; profundum vero seu crassum, propter elevationem illam, seu motum superficie”.

> enganados, pois ela está no lugar da construção. Eles não superpõem o que deve ser demonstrado como iguais, como eles próprios pensam, pois esse método não teria importância, e seria mais físico do que geométrico, dependendo dos sentidos. Em vez disso, eles superpõem algo que é igual, para que a igualdade daquilo que não é sobreposto se torne aparente[408].

Apesar dessa interpretação favorável ao método da sobreposição, mas sem mencionar Peletier, Biancani se afastará de ambos ao negar qualquer papel relevante à imaginação. Depreende-se isso do parágrafo anterior. Utilizando a Analogia da Linha (*República*, Livro VI, 509d - 511e), Biancani associa essa faculdade ao estágio mais inferior de apreensão dos objetos; no melhor dos cenários, a imaginação teria algum lugar na filosofia natural (*imaginatio autem [versatur] circa naturalem Philosophiam*), mas nunca na matemática, que é uma ciência puramente discursiva. Ao contrário de Clávio, Biancani claramente separa imaginação (*imaginatio*), própria da ciência natural, e raciocínio ou cogitação (*ractiocinatio seu cogitatio*), próprias da matemática[409].

> Por "per cogitationem" deve ser entendido um certo movimento da mente, isto é, um processo de pensamento, tanto pela força da palavra grega "noesis" quanto pela força da palavra latina "cogitatio". Com efeito, cogitatio é dita como se fosse "coagitatio" de "mens", que é a mesma coisa que discurso ou raciocínio. Portanto, é evidente pela autoridade desses filósofos que eles usavam o termo "raciocínio" em relação à matemática, mas "imaginação" em relação às coisas físicas, o que eles mesmos contestavam[410].

6.6. Novos axiomas de congruência

[408] Biancani, *De Mathematicarum natura dissertatio*, 1615, p. 24: Secundo eas esse tam perfectas ac euidentes quam reliquæ; falluntur, qui putant illam superpositionem esse demonstrationis medium, est enim loco constructionis: neque, quæ probanda sunt æqualia, ea superponuntur, ut ipsi putant, hæc enim ratio nullius esset momenti, nec Geometrica, sed Physica potius, niteretur enim sensibus: sed superponuntur quadam quæ æqualia sunt ut ex eorum superpofitione appareat æqualitas eorum quæ non superponuntur.

[409] *Idem,* p. 23.

[410] Ibd: Per cogitationem verò intelligendum effe quendam mentis motum ideft difcurfum tum ex vi græcè vocis Nonpares tum ex vi Latina vocis manifeftum cft cogitatio enim dicitur quafi coagitatio f métis quæ idem eft cum difcurfu aut ratiocinatione quare manifeftum eft horum Philofophorum authoritate ratiocinationem verfari circa Mathematicas imaginationem verò circa res phyficas contra quam ipfi contendebat

De maneira similar a Peletier, Foix-Candale (1512 - 1594)[411], em sua versão dos *Elementos* de 1566[412], também fará objeções ao método da sobreposição sob alegações de não ser um procedimento genuinamente geométrico. Ao comentar I.4 Foix-Candale promete apresentar uma demonstração alternativa para que se evite o uso de instrumentos mecânicos[413]. Esses instrumentos são associados aos nomes de Theon e Campano, não ao de Euclides. Contudo, não fica claro a qual instrumento ele se referia. Peletier nunca fez tal acusação. Aliás, a demonstração alternativa duas vezes prometida nesse mesmo parágrafo por Foix-Candale, a qual deveria estar amparada apenas no raciocínio, sem a transposição de figuras, ângulos ou retas[414], não aparece em parte alguma. As mesmas observações são feitas nos comentários a I.8[415] e III.24[416].

As objeções de Foix-Candale ficam muito aquém daquelas de Peletier, não só pela ausência de demonstrações alternativas, como também pelo fato dele não ter considerado a inclusão de novos axiomas ao texto de Euclides. De fato, o surgimento de novos axiomas de transposição e congruência começa a ocorrer em meados do século XVII.

Novos axiomas de movimento e congruência são introduzidos pelo jesuíta francês Claude Richard na sua versão dos *Elementos* de 1645[417]. O ponto de partida de Richard é o sistema axiomático de Clávio, como é esclarecido por ele na Carta ao Leitor. O Livro I contém seis postulados, dos quais os três primeiros são os mesmos de Euclides, i.e., os que estão na edição de Heiberg. Os axiomas, por sua vez, somam trinta, sendo que alguns desses são dois ou mais axiomas presentes em outras edições e que foram reunidos numa única proposição por Richard. Por exemplo, o Axioma IX corresponde ao Postulado 4 de Euclides, ao qual são acrescentados novos axiomas de congruência. (O Postulado 5 também é

---

[411] François de Foix, Conde de Candale, foi um matemático e engenheiro francês de formação humanista, tendo participado da reforma que resultaria no calendário gregoriano, inclusive em discussões e polêmicas com Clávio. Foix-Candale foi divulgador da matemática: em 1591, fundou a cátedra dessa disciplina no Collège de Guyenne na cidade de Bordeaux. Foix-Candale também tinha interesse em alquimia e foi grande divulgador de Hermes Trismegistos. Sobre sua vida, ver Jeanne E Harrie, *François Foix de Candale and the hermetic tradition in sixteenth-century France*. Tese (Doutorado), University of California, Riverside, 1975.

[412] François de Foix-Candale, *Euclidis Megarensis mathematici clarissimi elementa geometrica libri XV ad germanam geometriae intelligentiam è diversis lapsibus temporis iniuria contractis restituta*, Paris, Royer, 1566. Os princípios adotados são da edição de Grynaeus.

[413] Foix-Candale, *Euclidis Megarensis mathematici clarissimi elementa geometrica libri XV [...]*, Paris, Royer, 1566, 5v: "Alteram demonstrationem huic quartae exhibere cogimur, ne praebeatur aditus, quo ulla mechanicorum usuum instrumenta in demonstrationes incidant".

[414] Id: "Quod tanquam prorsus alienum à vero disciplinarum cultu reijcientes, aliam demonstrationem absque figurae, anguli seu lineae transpositione, protulimus ratione elucidatam".

[415] Foix-Candale, *Op. cit.*, 6v: "Huius alteram demonstrationis partem resecavimus eò quòd trianguli transpositione uteretur, quod quidem moechanicum spectat negotium à vera mathesi alienum, posita anguli qui ad z hypothesi ex quarta huius sumpta."

[416] Foix-Candale, *Op. cit.,* 27r: "Mathesis enim ex praeassumptis certis necessariò concludit, non autem ex sensibus externis praxim operantibus saepius fallacem".

[417] Claude Richard, *Euclidis elementorum geometricorum libros tredecim*, Antwerp, Verdus, 1645.

transferido para a lista de axiomas.) O Livro V também contém uma lista nova de axiomas, além de novas definições. O Livro VII contém dois postulados e doze axiomas. O Livro X possui um postulado e três axiomas.

Os seguintes princípios tratam da sobreposição:

Postulado V: *As quantidades, e aquilo que se relaciona com a quantidade, podem ser sobrepostos um ao outro através do intelecto, se forem considerados adequadamente*[418].

Postulado VI: *Quantidades podem ser [intelectualmente] concebidas em movimento por si mesmas, ou em torno de algo imóvel*[419].

Axioma IX: *E aquilo que é mutuamente congruente entre si, essas coisas são iguais. [E quantidades cujos extremos divisíveis são todos congruentes, são totalmente congruentes e são iguais. Linhas retas iguais são congruentes. Ângulos retos iguais são congruentes. Círculos iguais são congruentes. Arcos de círculos iguais são congruentes. Todas as figuras retas com lados e ângulos iguais são congruentes]*[420].

Axioma XXI: *Se os extremos de duas linhas retas são congruentes, um com um, [e] o outro com o outro, então, elas são congruentes em sua totalidade e serão iguais*[421].

Axioma XXX: *A mera mudança de posição de um triângulo, ou qualquer figura plana retilínea, não altera os seus lados e ângulos*[422].

Com os Postulados V e VI, Richard transforma em princípio matemático duas teses usadas por Clávio acerca da natureza da sobreposição. Essa escolha não deixa de ser esquisita, pois, na prática, ela endossa a sugestão de Peletier; para Clávio, ao contrário, não seria necessário acrescentar nenhum tipo de princípio de sobreposição. Além de enunciar tais princípios, Richard apresenta demonstrações dos Axiomas IX e XXI, sendo este último por redução ao absurdo. Tal qual Proclus e Clávio, Richard considera que alguns princípios podem ser demonstrados sem que isso seja algum tipo de violação da definição de princípio.

Giovanni Ricci (1607-1664), em sua versão dos *Elementos* de 1651[423], adota alguns dos princípios de transposição de congruência de Richard. No Livro I, o Postulado 5 visa garantir a reprodução de quaisquer figuras dadas; o Postulado 6, por sua vez, verbaliza a

---

[418] Quantitates, et ea quae ad quantitatem pertinent, superponi posse inuicem per intellectum, si prout debent fumantur.

[419] Quantitates posse concipi moueri secundum se totas, uel circa aliquid sui immobile.

[420] Et quá sibi mutuo cogruunt, ea inter se sunt aqualia [Et quantitates quarum extrema diuisibilia emnia congruunt, tota congruunt, et sunt æquales. Recta linea aquales congruunt. Anguli rettilinei aquales congruunt. Circuli aquales congruunt. Arcus circulorum aqualium aquales congruunt. Figura omnes rectilinea aquilatera et aquiangula congruunt] et sunt aquales.

[421] Si duarum rectarum linearum extrema congruant, unum uni, alterum alteri; tota congruent et aquales erunt.

[422] Trianguli, uel figura cuiuscumque rectilinea plana sola mutatio situs, nihil immutat in lateribus eius et angulis.

[423] Ricci, *De gli Elementi di Euclide li primi sei Libri*, Bologna, Longhi, 1651.

sobreposição de figuras, tal como o Postulado V de Richard, apesar de Ricci não fazer menção a operações intelectuais. Eis a lista:

Postulado 5: *Se uma coisa é proposta, tornar a fazer*[424].

Postulado 6: *Se duas coisas são propostas, sobrepor uma à outra*[425].

Axioma: 14: *Quando os termos de duas coisas planas são ajustados, os mesmos são ajustados*[426].

Axioma β: *Da mesma forma, quando duas coisas planas são ajustadas, os seus termos são ajustados*[427].

Andreas Tacquet[428], Isaac Barrow[429] e Roberval também adotam princípios de congruência similares aos de Richard. O manual de Tacquet contém apenas os Livros I-VI e XI-XII dos *Elementos*. São apresentados os seguintes princípios de congruência no Livro I:

Axioma 7: *Coisas que são iguais mutuamente são iguais*[430].

Axioma 8: *Se linhas retas forem iguais, são mutuamente congruentes; e se ângulos forem iguais, são mutuamente congruentes*[431].

Tacquet acrescenta ao Axioma 7 uma nota crítica a Clávio, e indiretamente a Richard, por este não ter convertido corretamente esse referido axioma, i.e., por assumir que coisas que são iguais são congruentes[432]. Essa observação já havia sido feita por Proclus[433], para o qual a congruência entre figuras exigiria igualdade e semelhança *em forma*, as quais são as condições usadas por Euclides para demonstrar a congruência das bases dos triângulos. O Axioma 8, portanto, é na prática a verbalização da recomendação de Proclus sobre a necessária restrição da conversão apenas a segmentos e ângulos[434].

A respeito do texto de Barrow, sobre o qual ainda falaremos na próxima seção, os princípios enunciados no Livro I baseiam-se na edição de Clávio: são três postulados, os construtivos, e vinte axiomas, dentre os quais os Postulados 4 e 5. Nos demais princípios,

---

424 Proposta una cosa, ripigliarla.
425 Proposte due cose, souraporle l'una all'altra.
426 Quando si adattano i termini di due cose piane, si adattano le medesime.
427 Econuersamente, quando si adattano due cose piane; si adattano i suoi termini.
428 Tacquet, *Elementa geometriae planae et solidae*, Antwerp, Meurs, 1654.
429 Barrow, *Euclidis Elementorum Libri XV breviter demonstrati*, Cambridge, Nealand, 1655.
430 Que mutuo sibi congruunts æqualia sunt.
431 Si recte linee equales fuerint, sibi mutuo congruent; et anguli si æquales fuerint, fibi mutuo congruent.
432 Ver Clávio, *d., Opera mathematica*, 1612, Tomo I, Axioma VIII, p. 24.
433 Proclus, *In Euclidis*, 241.1-20.
434 Ver Tacquet, *Elementa geometriae planae et solidae*, Antwerp, Meurs, 1654, p. 11: "Non rectè Clauius hoc Axioma conuertit. Falsum est enim, ea quæ uniuersim inter se aequalia sunt sibi mutuo congruere: Dissimiles enim magnitudines possunt esse aquales, neque tamen congruent. Quòd si similes et aquales fuerint ualebit conuersa".

Barrow acompanha o texto de Pierre Herígone[435]: no Livro V, Barrow apresenta mais um axioma; no Livro VII, em consonância com as edições medievais, são apresentados três postulados e doze axiomas; no Livro X são enunciados um postulado e três axiomas. Em vez de enunciar novos axiomas de congruência, Barrow apenas acrescenta uma *scholia* ao Axioma 8, correspondente à Noção Comum 7 da atual edição de Heiberg:

Axioma 8: *E as coisas que mutuamente se ajustam são iguais entre si. (Este axioma é verdadeiro para linhas retas e ângulos, mas não para figuras, a menos que sejam semelhantes. Porém, magnitudes são ditas congruentes quando suas partes, aplicadas às partes correspondentes, ocupam o mesmo lugar ou espaço igual)*[436].

No caso de Barrow, deve-se ressaltar, em antecipação às discussões subsequentes, que apesar da *scholia*, ele não considerava o método da sobreposição como ilegítimo. Para ele, ao contrário, trata-se de um dos mais fundamentais recursos da geometria euclidiana.

6.7. Sobreposição e entimemas: Savile, Barrow e Borelli

O debate sobre a sobreposição se estende até o século XVII com Henry Savile (1549-1622). Suas ideias concernentes ao método da sobreposição estão presentes no texto *Praelectiones tresdecim in principium elementorum Euclidis,* de 1621. Certamente o movimento deveria ser rejeitado na geometria, diz ele, comentando a demonstração de Foix-Candale[437]. Por outro lado, esse é um recurso legitimado por se tratar de um teorema (como já havia argumentado Clávio) e por não haver outros teoremas antes de I.4. Após ter criticado as demonstrações alternativas de Candala, Savile conclui de maneira sarcástica:

> Ó divino Aristóteles, tu nos ensinaste que a Matemática não deve depender de raciocínios plausíveis [πιθανολογωτα], que seguem probabilidades, muito menos se apoiar em silogismos meramente circulares, que carecem de qualquer forma de probabilidade [i.e., demonstrabilidade]. Portanto, permita-nos, em conformidade com Euclides, Arquimedes, Proclus e, de fato, a antiguidade; errar preferivelmente a proferir verdades com alguns dos recentes que têm julgamento limitado, especialmente quando não há base sólida para este campo de aplicação [ἐφαρμογή][438]

[435] Ver Herigone, *Cursus mathematicus. Cours mathematique,* Paris, Le Gras, 1634.

[436] Et quæ sibi mutuò congruunt, eà inter se sunt æqualia. (Hoc axioma in rectis lineis et angulis ualet conuersum, sed non in figuris, nisi illa similes fuerint. Gæterum, magnitudines congruere dicuntur, quárum partes applicata partibus, æqualem uel eundem locum occupant.

[437] Savile, *Praelectiones tresdecim in principium elementorum Euclidis*, Oxonii habitae, 1621, p. 197: Et certe positionis mutationem in fabrica problematum ad sinem secundæ reiecimus ut petitionem principii nec in problematibus quidé vllo modo tolerabilem [...] Imò quid opus esset tali propofitione?

[438] Savile, *Praelectiones tresdecim in principium elementorum Euclidis*, Oxonii habitae, 1621, p. 202: O divine Aristoteles, tu nos docuisti Mathematicu non perpeti πιθανολογωτα, probabilitatis consectantem, nedum syllogismo utentem mere circulari quod vel omni probabilitatis specie caret. Liceat ergo nobis cum Euclide,

A resposta de Barrow está inserida na *quaestio de certitudine mathematicarum*. Como se viu, Clávio contra-argumentou a partir de uma perspectiva pedagógica. Era de seu interesse preservar uma hierarquia dos saberes dentro da Sociedade de Jesus, o que se refletiria, em seu entender, na superioridade das demonstrações matemáticas. Essa também viria a ser a estratégia usada por Isaac Barrow, que retomou o debate já na segunda metade do século XVII com suas *Lectiones Mathematicae* (publicadas postumamente em 1683)[439]. Contudo, enquanto Clávio deixou de responder à relação entre causalidade e as demonstrações matemáticas, Barrow não apenas respondeu em favor de tal relação, como também aqui reafirmou a superioridade da matemática em relação às ciências naturais. De fato, as réplicas de Barrow levaram-no a formular uma das mais originais teses dentre os autores considerados, a saber, que somente a causa formal é compatível com o conhecimento científico em geral, sendo a causa eficiente uma mera ficção.

Ao longo de suas *Lectiones Mathematicae*, especialmente a partir da IVª, Barrow expõe em linhas gerais os requisitos de uma ciência demonstrativa. Ele declara que é propósito de toda ciência investigar as propriedades (*proprietates*) e afecções (*affectiones*) de seus respectivos objetos, acompanhados por sua essência, na medida em que se seguem mediata ou imediatamente; e tudo isso através dum *discurso* certo e evidente: a demonstração[440]. Portanto, diz Barrow, três coisas deveriam ser consideradas pela ciência demonstrativa: o objeto, os princípios (aqui chamados axiomas comuns, como em Aristóteles) e as afecções. O objeto da geometria são espécies de magnitudes especificadas e determinadas. Já em relação às afecções, elas são comuns ou próprias. As *afecções comuns* concordam necessariamente com os membros dum certo gênero, mas não são exclusivas e, portanto, são insuficientes para classificá-los em espécies distintas. Por exemplo: ter os ângulos internos iguais a dois retos pertence ao gênero dos triângulos, mas isso não é suficiente para diferenciar o isósceles do equilátero e estes dois do escaleno. Alguém poderia

---

Archimede, Proclus totâq; adeo antiquitate errare potius, quam cum recentioribus quibusdam non maximi judicii hominibus verum dicere, præsertim nihil sani solidiue in hujus ἐφαρμογή capu locum substituentibus.

[439] Com relação à tradução dos *Elementos* feita por Barrow e o estilo editorial que ele seguiu, bem como uma comparação com as outras edições inglesas do texto de Euclides, ver Jocelyn Hargrave, "Eighteenth-Century Editorial Style at Work: The Editing of The Elements of Euclid by Isaac Barrow and Robert Simson". *The Evolution of Editorial Style in Early Modern England*, 2019, pp. 123-151. Segundo Mordechai Feingold, o texto de Barrow foi um verdadeiro best-seller, mantendo-se relevante por pelo menos um século. Ver Feingold (ed.), *Before Newton: the life and times of Isaac Barrow.* Cambridge University Press, 1990. No prefácio desta obra, Barrow diz que inspirou-se nas versões de André Tacquet, de 1554, e na de Pierre Hérigone, de 1539, respectivamente. Ele diz também que, se não fosse o fato de o primeiro ter exposto apenas os Livros I-VI, não haveria necessidade duma outra versão. Além dos *Elementos*, Barrow traduziu as *Cônicas* de Apolônio (em "novo método"), a *Esférica* de Teodósio e alguma coisa de Arquimedes. Mantendo-se atualizado, ele cita Clávio na Lição XIII, onde menciona outras discussões sobre os princípios de Euclides.

[440] Barrow, *Lectiones Mathematicae*, 1683, p. 59.

objetar que tais afecções são demasiado abrangentes, uma vez que o atributo “ser uma figura plana” abarca círculos, triângulos, quadriláteros, etc. A isso Barrow se adianta afirmando que as afecções comuns não podem estar nas definições, mas antes pertenceriam a uma disciplina de ordem superior[441]. As *afecções próprias*, por outro lado, concordam com seus objetos necessariamente e exclusivamente; dessa maneira, ser uma figura plana limitada por uma linha a partir da qual todos segmentos retilíneos traçados a partir de um ponto são iguais é uma afecção própria do círculo e, no sentido inverso, se uma figura é um círculo, então será uma figura plana, etc.

Ora, conclui o autor, todos esses requisitos se encontram na matemática teórica e nenhuma outra ciência trata de objetos tão exatos quanto aqueles estudados por Euclides. O fato de nenhum objeto físico conseguir satisfazer as afecções exatas é suficiente para Barrow reafirmar a superioridade da matemática. Diz o autor:

> Porém, deixando de lado toda a autoridade para chegar à verdade do assunto, parece claro, a partir do que foi dito, que as demonstrações matemáticas são eminentemente causais porque apenas buscam suas conclusões a partir de axiomas que exibem as afecções mais universais de todas as quantidades e a partir de definições que declaram a geração constitutiva e as paixões das magnitudes particulares. Daí que as proposições que emergem de tais princípios supostos precisam se seguir das essências e causas das coisas[442].

Para Barrow, tal como em Clávio e Biancani, a certeza matemática decorre *também* de suas demonstrações, não apenas de seu objeto, como afirmam Proclus e Piccolomini.

No tocante aos princípios, Barrow mantém incólume a lista tríplice de Aristóteles, acrescentando somente algumas notas de elucidação. Uma hipótese (que, para o autor, é sinônimo de postulado) é uma proposição que afirma ou assume um *modo*, *ação* ou *movimento* dalguma coisa; por exemplo: traçar uma reta entre dois pontos. Neste sentido, a audiência pode aceitar os postulados geométricos de Euclides consultando a experiência; *e.g.,* ao notar que se pode traçar uma linha física entre dois pontos[443]. E Barrow segue observando, desta vez sob influência de Proclus, que as hipóteses estão para os problemas assim como os axiomas estão para os teoremas. Diz ele: “Pois tal como um *problema* mostra a maneira e demonstra a possibilidade de uma estrutura, também a hipótese assume alguma construção

---

[441] Depreende-se dessa passagem que Barrow se referiu à “matemática geral” (τῆς ὅλης μαθηματικῆς) mencionada por Proclus (*In Euclidis*, 18.6-9). Segundo este, essa disciplina abarcaria toda forma de conhecimento matemático (τῆς μιᾶς ἐπιστήμης ἔγγονα τῆς πάσας ὁμοῦ τὰς μαθηματικὰς γνώσεις ἐν ἑνὶ ἐπεχούσης ἀναλογισώμεθα). Pertencem a essa ciência (i.e., são comuns a toda matemática) os teoremas sobre proporção e igualdade, bem como a extração de raiz; o método da análise. O conhecimento dos teoremas dessa ciência, diz Proclus, deveria anteceder as ciências matemáticas particulares, i.e., geometria e aritmética (*In Euclidis*, 7-10, 44). Em sua tradução de 1560 (p. 4), Barrozi escreveu à margem: *divina scientia*. A historiografia da matemática, porém, usaria outro nome: *mathesis universalis*.

[442] Barrow, *Lectiones Mathematicae*, 1683, p. 92.

[443] Barrow, *Lectiones Mathematicae*, 1683, p. 149.

que é manifestamente possível"[444]. Embora não o diga (explicitamente), esta analogia vale também ao nível da gramática ordinária, uma vez que os postulados de Euclides, i.e., os três primeiros admitidos por Barrow e Clávio, são enunciados numa espécie de linguagem normativa na qual autoriza-se que tal e qual coisa se possa fazer — em vez de declarar proposições —, sendo também esta a linguagem usada por Euclides para expressar alguns de seus enunciados matemáticos.

Em seguida são discriminados axiomas universais e axiomas particulares. Os *axiomas universais* — ou *absolutos*, como também são chamados por Barrow — declaram alguma afecção essencial a todas as magnitudes; *e.g.*, que se pode tirar uma magnitude menor duma maior. Os *axiomas particulares* são aqueles empregados pelo geômetra e podem ser reduzidos às definições. Bem observado, o que Barrow faz é introduzir mais uma divisão no que Aristóteles havia chamado princípios próprios. Onde antes Aristóteles havia posto as definições e hipóteses, agora Barrow acrescenta os axiomas particulares, tratando os axiomas universais como axiomas no sentido original proposto por Aristóteles.

Por outro lado, a lista não é compatível com a dos *Elementos*, especialmente os postulados 4-5. Mas aí, rebate Barrow, Euclides deveria ser responsabilizado por colocar erroneamente aquelas proposições entre os postulados e não entre os axiomas. A razão para isso, ao contrário do que já havia sugerido Proclus — que chamou atenção para o aspecto prescritivo dos Postulados 1-3 —, é que o postulado 4 poderia ser reduzido à definição de ângulo reto, ao passo que o postulado 5 seria reduzido à definição de linhas paralelas[445]. E, de fato, é essa "pequena" emenda que Barrow acrescenta na sua tradução do texto euclidiano. Percebe-se aqui, mais uma vez, como as alterações ao texto de Euclides tinham motivações intelectuais muito além da mera correção filológica.

Como foi sugerido, algumas das correções e emendas ao texto de Euclides estavam associadas aos desafios postos ao estatuto científico da matemática. Isso era o caso em Clávio, que recomendava a exposição silogística das demonstrações euclidianas, e era também em Barrow; este último, porém, foi além da simples comparação entre as provas matemáticas e as da filosofia natural para mostrar que nenhum outro tipo de causalidade, além da formal, típica da matemática, poderia ter cidadania na ciência de um modo geral.

Barrow diferencia as *demonstrações simples*, compostas apenas por um silogismo da primeira figura, e as *compostas*, i.e., uma cadeia de demonstrações simples. Dessa maneira, diz Barrow,

---

[444] Barrow, *Lectiones Mathematicae*, 1683, p. 144.
[445] Barrow, *Lectiones Mathematicae*, 1683, pp. 147-148.

> (...) parece-me que todo discurso certo e evidente, estando em conformidade com as indisputáveis regras da lógica, a partir de princípios universalmente e perpetuamente verdadeiros, em que se encontre uma conexão necessária dos termos, é própria e cientificamente uma demonstração perfeita. E que qualquer outra causalidade, que é aqui aplicável, excetuando-se essa conexão ora explicada, é uma mera ficção, não endossada por argumento de qualquer tipo nem confirmada por exemplo algum. E que as demonstrações, embora algumas se sobressaiam em relação a outras em questões de brevidade, elegância, proximidade aos respectivos primeiros princípios e outras excelências, são, não obstante, bem parecidas na evidência, certeza, necessidade e na conexão essencial e mútua dependência dos termos entre si[446].

Todavia, em vez de mostrar como reconstruir a proposição I.1 a partir de silogismos demonstrativos, Barrow opta por seguir por meio de entimemas, nos quais apenas a premissa maior deveria ser verbalizada e esta deveria corresponder a um princípio[447]. Como visto há pouco, esse entendimento de que os matemáticos procedem, *na maioria das vezes*, por entimemas fora explicitado por Biancani, o qual havia atribuído a Clávio, um nome bem conhecido e nominalmente citado por Barrow[448].

Olhando-se a discussão em retrospecto, porém, os argumentos de Barrow conduzem a conclusões parecidas com as de Proclus e Piccolomini. Barrow esforçou-se em mostrar que as demonstrações matemáticas são superiores em relação às da filosofia natural, porém tal superioridade decorre da exatidão dos seus objetos, como também argumentaram Proclus, Piccolomini e até mesmo Clávio. Mas, ao contrário de Piccolomini, que, como foi visto, retirou da matemática quaisquer conexões com o conceito de causalidade, o que se pode atribuir a Barrow é a identificação dos raciocínios matemáticos à *demonstratio propter quia*, deixando de lado a *demonstratio quid* e demolindo a *demonstratio potissima*. Ou seja, o raciocínio matemático procederia somente a partir dos princípios para as conclusões, mas nunca o inverso. É a partir da dicotomia acima que Barrow extrai seu argumento sobre a natureza causal das demonstrações matemáticas. Trata-se, porém, duma causalidade *formal*. E este é o único tipo de causalidade a ser admitida.

Como se viu até aqui, Aristóteles serviu como uma espécie de condutor universal de ideias e teses ao longo dos séculos XVI e XVII, não importando se, nalguns casos, seus defensores eram os responsáveis por demolir uma tradição há muito consolidada. E talvez isso

446 Barrow, *Lectiones Mathematicae*, 1683, p. 110.
447 Vide Barrow, *Lectiones Mathematicae*, Lição VII, pág. 107.
448 Lassalle Casanave também chama atenção para a menção feita aos entimemas matemáticos por Christian Wolff (*Elemena mateseos universalis,* 1741, §45): "São, pois, as demonstrações dos matemáticos agregados de entimemas. Assim que todas por força dos silogismos concluem, sendo omitidas as premissas, as quais ou ocorrem espontaneamente à meditação ou são reconduzidas por citações à memória" (tradução de Lassalle Casanave, 2019, p. 132).

tenha acontecido com os autores estudados até o presente, especialmente Barrow, que não hesitou em privilegiar a causa formal baseando-se na superioridade da matemática e na exatidão de seus objetos. Que dizer então da causa eficiente?

A estratégia de Barrow, a partir daqui, depende fundamentalmente do que Mancosu chamou de *voluntarismo teológico*[449]. De acordo com Barrow, não existe (e não pode existir) uma conexão entre uma causa eficiente externa com seu efeito em que o segundo seja *necessariamente* suposto pela suposição do primeiro; ou, em sentido inverso, não pode haver a determinação da causa a partir da suposição do efeito. Isso não quer dizer que é infundada a expectativa de que um fenômeno se siga a outro; *e.g.*, que objetos com massas diferentes caem com velocidades diferentes sob a gravidade da Terra. O que Barrow defende é que não se pode inferir que necessariamente um acontecerá se o outro acontece.

> Pois toda ação de uma causa eficiente, bem como seu efeito consequente, dependem da vontade livre e do poder de Deus Todo Poderoso, que, por Seu arbítrio, pode proibir o influxo e eficácia de qualquer causa; tampouco há efeito algum tão circunscrito a uma causa, porque pode ser produzido por inumeráveis outras. Daí ser possível que haja tal coisa como uma causa sem seu efeito subsequente, ou tal outra coisa como um efeito e nenhuma causa particular que conceda algo para sua existência[450].

Como tudo no mundo ocorre de acordo com a vontade de Deus e é possível haver uma causa sem um efeito ou efeito sem uma causa, se assim o Senhor decidir, não haveria como se argumentar da causa conhecida para seus efeitos futuros, ou, no sentido inverso, dos efeitos conhecidos para sua causa próxima[451]. E Barrow vai além, tentando mostrar o suposto equívoco de Aristóteles (e dos lógicos que lhe seguiram) ao usar as posições dos planetas para então inferir que, por causa da posição da Lua, entre a Terra e o Sol, há eclipse. Porque, diz Barrow, “(...) se Deus assim o quiser, os raios solares podem passar através do corpo da Terra ou atingir a Lua apenas por uma passagem indireta sem tocar a Terra; ou, ao contrário, a Lua pode ser iluminada de algum outro modo”[452]. Por um simples ato de vontade, diz Barrow, citando os Salmos, Deus comanda a criação da matéria de que acordo com as propriedades e

---

[449] Mancosu, *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*, Oxford University Press, 1996, p. 22.

[450] Omnis enim efficientis causa: tum actio, tum actionem consequens effectus pendet a liberrima voluntate, summaque potestate Dei O. M. qui pro suo arbitratu prohibere potest influxum et efficaciam cujuscunque causa? ; itemque nullus est effectus sic uni causa? alligatus, quin ab aliis forsan innumeris possit produci. Ergo fieri potest, ut hujusmodi causa sit, nec effectus subsequatur ; vel ut effectus sit, et nulla peculiaris causa quicquam conferat ad ejus existentiam (Barrow, Barrow, *Lectiones Mathematicae*, 1683, p. 98).

[451] Barrow, *Lectiones Mathematicae*, 1683, p. 98.

[452] “(...) [N]am volente Deo solares radii telluris corpus permeabunt ; aut a recto tramite declinantes, adeoque terrae non occursantes, lunam attingent, vel aliunde luna luce perfundetur” (Barrow, *Lectiones Mathematicae*, 1683, pp. 94-95).

perfeições que Lhe aprazem[453]. Mas o ser humano percebe regularidade no mundo físico. Um eclipse solar é de tal ordem. Contudo, diz Barrow, essa regularidade é devida às leis e costumes (*legem et consuetudinem*) da natureza, que são sempre contingentes e não asseguram uma conexão necessária entre os eventos[454].

Como lembrou Mancosu[455], o debate sobre o estatuto científico das matemáticas no início da Modernidade pode ajudar a compreender alguns momentos da formação intelectual de três autores comumente associados com a Revolução Científica dos séculos XVII e XVIII. Sabe-se, por exemplo, que Galileu entrou em contato com Clávio no início do séc. XVII, e havia tomado conhecimento da *Quaestio* através de alunos e colegas do padre jesuíta no Colégio Romano. Esta mesma discussão alcançou Descartes, que entrou em contato com os tratados matemáticos de Clávio e a pedagogia jesuítica durante o tempo em que passou no Collège de La Flèche. Ambos os autores, Galileu e Descartes, são mencionados nominalmente por Barrow ao longo de suas discussões. Por fim, convém lembrar que Isaac Newton entrou em contato com os *Elementos* através da tradução preparada por Barrow, seu colega de departamento e, durante os momentos iniciais, mentor intelectual, do qual deve ter ficado sabendo da *Quaestio*.

Quando Barrow começou a se manifestar sobre este tema, já começava a ficar claro como seria difícil para o modelo clássico de ciência dar conta das novas observações trazidas por Copérnico, Kepler e Galileo — que chegou a levar alguns resultados em primeira mão para um já idoso Clávio —, abrindo espaço para o então colega de Barrow, Isaac Newton. Importa observar, porém, que embora Barrow não tenha conseguido reverter a situação desfavorável a Aristóteles, e nem parece ter sido este seu objetivo imediato, ele

---

[453] Salmos, 33:9: *Porque falou, e foi feito; mandou, e logo apareceu*. Vide páginas 372-373 do Sermão VII: "The Being of God Proved from the Frame of Human Nature" em *The Theological Works of Isaac Barrow*, 1859, vol. V. Ver também, na mesma obra, “The Being of God Proved from the frame of the World” (Sermão VI).

[454] Durante o processo de sucessão de John Playfair à frente da cátedra de matemática na Universidade de Edimburgo, o então professor Dugald Stewart precisou intervir a favor de seu protegido e ex-aluno, Leslie, que então participava do processo seletivo e era (talvez por isso mesmo) acusado de ateísmo em jornais locais por se mostrar favorável a algumas partes da filosofia de Hume. (Toda a polêmica tinha origem numa nota de rodapé dum livro de Leslie.) A defesa de Stewart, publicada em 1805 sob o título *A Short Statement of Some Important Facts, Relative to the late election of a Mathematical Professor in the University of Edinburgh*, baseou-se na observação de que Hume não fora o único e sequer o primeiro a criticar a noção de causalidade física, termo usado pelo próprio autor. Na verdade, argumentou Stewart, as primeiras objeções à causalidade partiram de pessoas como Isaac Barrow, cuja devoção à Fé cristã colocava-o acima de quaisquer suspeitas. As críticas de Barrow são também mencionadas por Stewart no texto *Elements of the Philosophy of the Human Mind*, de 1792. Lembramos ainda que o próprio Hume tinha conhecimento das *Lectiones Mathematicae*, citando-as no *Tratado da natureza humana* (Livro I, Parte II, Seção 4), embora num contexto bem diferente. Se Hume mostrou interesse nas críticas de Barrow é uma questão que já não cabe no escopo geral deste texto.

[455] Mancosu, *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*, Oxford University Press, 1996, capítulo 3.

ajudou a escrever um dos capítulos mais importantes sobre o conceito de causalidade no início da Modernidade.

Ao tempo em que Giovanni Alfonso Borelli (1608 - 1679)[456] publicou *Euclides restitutus*[457], a geometria elementar na Europa, sobretudo na Itália, era bem diferente do que se encontra nos *Elementos*. Por não haver consenso acerca de quais princípios eram genuinamente euclidianos, se eram indemonstráveis ou não, e se Euclides era o responsável pelas demonstrações, os matemáticos poderiam adaptar Euclides a suas teses epistemológicas. No âmbito da *quaestio de certitudine mathematicarum*, a principal das razões para tais modificações era poder mostrar a adequação de Euclides aos requisitos lógicos e epistemológicos de Aristóteles. Tal foi o caso do texto de Herlin & Dasipodius. A ocasião também era propícia para a introdução de novos métodos, como as operações algébricas para expressar problemas geométricos. Dentre os melhores exemplos, estão, Cardano, Maurolico, Viète, Pierre Herigone (1580 - 1583)[458], Clávio e Isaac Barrow. Para esses matemáticos, as demonstrações euclidianas são silogísticas, ou podem ser reduzidas a silogismos, mas de maneira que, através da introdução e manipulação de símbolos os argumentos tornar-se-iam mais curtos.

Deixando de lado as novidades importantes introduzidas por Borelli, ressaltamos o seguinte comentário feito logo após ele caracterizar as demonstrações euclidianas em I.1:

> Certamente, deve-se advertir que o processo de demonstração não se expõe por silogismos *em forma* para evitar a prolixidade, pois ninguém procede sempre por silogismos de primeira figura nas demonstrações, nas quais na maioria dos casos se omite a proposição menor em favor da brevidade[459].

Apesar da ausência do vocábulo correspondente, essa é a caracterização típica de um entimema que se poderia encontrar em manuais de retórica da época, até mesmo os que não

---

[456] Borelli começou sua carreira acadêmica na Universidade de Messina entre 1637 e 1639. Além da tradução dos *Elementos*, também traduziu e aprimorou os Livros V e VI das *Cônicas* de Apolônio baseando-se num manuscrito de Francesco Maurolico (*Emendatio et restitutio conicorum Apollonii Pergaei*). Deve-se sublinhar que Maurolico foi provavelmente o primeiro a axiomatizar o Livro V dos Elementos em *Euclidis elementorum compendia*, 1567 (não publicado). Sobre sua contribuição aos fundamentos da geometria, ver Vincenzo de Risi, Euclid Upturned: Borelli on the Foundations of Geometry. *Physis; rivista internazionale di storia della scienza*, n. LVIII, 2022. Borelli é também reconhecido por suas contribuições à física de Galileu, sendo inclusive citado nominalmente por Newton como um de seus predecessores. A esse respeito, ver A Koyré, La mécanique céleste de J A Borelli, *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 5, 1952, p. 101-138.

[457] Borelli, *Euclides restitutus, sive prisca geometriae elementa*, Pisa, F. Onofrio, 1658. Uma segunda edição é publicada em Roma, Mascardi, 1679. Uma tradução italiana foi publicada sob o título *Euclide rinnovato ovvero gli antichi elementi della geometria*, Bologna, Ferroni, 1663.

[458] Herigone, *Cursus mathematicus, nova, brevi, et clara methodo demonstratus.* A tradução francesa, *Cours mathematique, demonstre d'une nouvelle, briefve, et claire methode,*de 1634, também contém o texto em latim.

[459] Animaduertendum etiam est processum demonstratiuum ad euitan dam prolixitatem non exponi per syllogismos in forma fed nihilominus in bifce demonftrationibus femper proceditur per syllogismos primę figurę in quibus vt plurimum ommittitur minor propofitio breuitatis causa. Veja-se tradução em Lassalle Casanave, *Por construção de conceitos,* Rio de Janeiro, 2019, p. 132.

pertenciam à tradição aristotélica. Se Borelli chegou a essa observação a partir de Biancani e Barrow, só se pode conjecturar. Não se tem notícias de que tenha estado em sua posse algum exemplar de Biancani. Faz sentido. Borelli era um tenaz admirador da ciência de Galileu, e um tenaz crítico da escolástica, de maneira que não teria tantos motivos para ler um tratado "já superado". Borelli tinha alguns títulos de Barrow, todos, porém, de após 1658. Além disso, a menção aos entimemas aparece numa obra de 1683, quando ambos já estavam mortos. É possível, todavia, que num desses encontros presenciais em Florença os dois matemáticos tenham chegado à mesma conclusão. De novo, são apenas especulações[460].

6.8. Observações finais

A reconstrução axiomática dos *Elementos* não é explicada apenas pela necessidade de correção filológica, tampouco esse episódio se esgota com a recepção de Proclus, haja vista que muitos dos novos axiomas introduzidos sequer são mencionados por ele. Esse é o caso dos axiomas de congruência e transposição de figuras estudados aqui. No âmago dessa axiomatização estava o debate sobre a legitimidade matemática do método de sobreposição. Tal debate existia entre comentadores árabes de Euclides e persistiu até o século XX com Bolzano e Russell, até encontrar a solução *standard* de Hilbert.

Até onde se tem notícias, Jacques Peletier foi o primeiro crítico do método da sobreposição na Modernidade e ele não parece ter lido os comentadores árabes de Euclides. Viu-se que as objeções dele ainda estão inseridas no quadro conceitual fornecido pelo modelo clássico de ciência. Esse também era o caso dos principais opositores de Peletier: Clávio, Biancani, Saville e Barrow. Todavia, os dois lados consideram que a prática matemática euclidiana exigia considerações sobre a importância da imaginação (*phantasia*) e dos entimemas, o que parece ainda ecoar o desprestígio da lógica ante a retórica. Esse certamente era o caso de Peletier, que enxergava na retórica uma alternativa metodológica, apesar dele ainda definir a demonstração como um silogismo.

Henry Saville e Isaac Barrow igualmente se opuseram a Peletier. Contudo, quando Barrow começou a se manifestar sobre este tema, já começava a ficar claro como seria difícil para a ciência aristotélica dar conta das novas observações trazidas por Copérnico, Kepler e

[460] Pode-se especular se Barrow adotou a visão de Biancani sobre os entimemas. Mordechai Feingold não lista nenhum título do jesuíta na biblioteca do matemático inglês. Ele conta, porém, que Borelli conheceu Barrow na época em que este foi a Florença, em 1656. Barrow visitou as Bibliotecas Medici e Laurenziana (não conheceu a Vaticana por causa da praga que assolava Roma). Ver Mordechai Feingold (Ed.), *Before Newton: the life and times of Isaac Barrow*, Cambridge, 1990, p. 49.

Galileo. Isso não quer dizer que o modelo clássico tenha sido abandonado. O *Principia Mathematica* de Isaac Newton, colega de Barrow, ainda tinha uma estrutura axiomática que, para a época, poderia ser considerada aristotélica. Barrow não conseguiu reverter a situação desfavorável a Aristóteles, e nem parece ter sido este seu objetivo imediato. A sua importância dentro da *quaestio de certitudine mathematicarum* reside na maneira como ele inverteu o desafio de Piccolomini, uma vez que para ele não era só a demonstração matemática que expressava a causalidade formal, senão que todo argumento científico.

7. Infinitude e espaço: a importância da reforma axiomática de Francesco Patrizi

7.1. Resumo do capítulo

Para além dos novos axiomas de congruência e transposição, o século XVI também é marcado pela introdução de novos axiomas de intersecção entre linhas. Ao longo deste capítulo, mostramos que embora axiomas dessa natureza sejam considerados na filosofia da matemática contemporânea uma maneira de eliminar o recurso ao diagrama, essa não era a preocupação principal nos séculos XVI-XVII. Em autores como Oronce Finé e Claude Richard os axiomas de intersecção são usados numa ou noutra proposição, mas nunca sistematicamente. A reforma mais radical aparece com Patrizi, que introduz na geometria euclidiana o espaço infinito. De fato, a axiomatização de Patrizi é a que mais se afasta do modelo clássico de ciência, pelo menos no que diz respeito aos objetos das matemáticas. Além disso, Patrizi formula uma concepção discursiva de demonstração que dispensa o uso da imaginação e dos diagramas. Vê-se, por fim, de que maneira essa concepção de definição está vinculada às críticas de Patrizi à retórica.

7.2. Introdução

A axiomatização moderna dos *Elementos* não foi desencadeada pela necessidade de correção filológica. Por outro lado, ela também não se esgota com a recepção de Proclus e Filopono. Muitos dos novos princípios introduzidos sequer são mencionados por um ou outro filósofo. Como ficou dito, as discussões relativas às reconstruções dos *Elementos* tinham como pano de fundo o modelo clássico de ciência. Tanto os apoiadores de Aristóteles quanto seus detratores viram em Euclides um meio de endossar ou refutar o que foi dito nos *Analíticos posteriores*. Uma vez que se chamou atenção para a importância em se considerar a recepção dos *Elementos* no início da Modernidade, espera-se, agora, mostrar como o gradativo interesse pela introdução do conceito de espaço, bem como novos axiomas espaciais, na geometria euclidiana coaduna-se com a rejeição dos postulados de construção como princípios de conhecimento matemático.

Sob um ponto de vista historiográfico, pode-se pensar os *Fundamentos da geometria* de Hilbert como um dos mais recentes episódios na longa história da busca pelos primeiros princípios do conhecimento matemático, a qual remonta à Grécia clássica. As discussões filosóficas no início da Modernidade, porém, são igualmente relevantes, uma vez que antecipam o predomínio da perspectiva axiomático-formal que viria a ser consolidada naquela obra. A primeira dessas discussões diz respeito à natureza demonstrativa das construções euclidianas. Na Europa, as críticas à silogística já existiam desde o século XV, mas até então tinham se mantido afastadas das matemáticas. A recepção do platonismo tardio foi fundamental para o estabelecimento do espírito anti-aristotélico que permeou o ambiente acadêmico. Por exemplo, as *Enéadas* de Plotino, na qual o autor desdenha da silogística como uma ferramenta estéril em comparação com a dialética, tinha ampla divulgação graças à tradução de Marsilio Ficino, o qual também traduziu textos de Proclus. O próprio Proclus, aliás, forneceu os principais argumentos usados ao longo da polêmica *quaestio de certitudine mathematicarum*. No intuito de se contrapor a isso, Alessandro Piccolomini acabaria reforçando ainda mais as críticas já existentes aos supostos problemas metodológicos no âmbito do pensamento aristotélico.

A reconstrução silogística, como visto, fazia parte do programa pedagógico que Cristóvão Clávio vinha preparando para os colégios jesuítas, embora ele entendesse que o argumento típico dos matemáticos não é, e nem precisa ser, silogístico. Ele almejava uma filosofia natural sob a condução das matemáticas e estas fundamentadas na lógica, mas precisou se contentar com uma formulação bem mais modesta na versão final da *Ratio studiorum*. Seja como for, é certo que a recepção de Proclus está na origem da limitação verificada nas versões modernas dos *Elementos* a apenas três postulados. O acréscimo de novos axiomas à lista já conhecida de Euclides, portanto, começava com os Postulados 4 e 5, como se nota em Oronce Finé (1536) e no próprio Clávio (1574).

Do que foi exposto, poder-se-ia pensar que o único problema a ser resolvido pela reforma axiomática era a adequação formal das demonstrações euclidianas aos silogismos aristotélicos. Seria de se esperar, por conseguinte, que boa parte dos novos princípios tivesse o propósito de verbalizar as relações gráfico-espaciais exibidas pelos diagramas. Ou seja, acrescentava-se uma proposição como princípio — formulada em linguagem teórica — onde antes se verificava o uso do diagrama para justificar algum passo na demonstração. São exemplos dessa linha de raciocínio os axiomas de intersecção presentes nas edições dos *Elementos* de Finé e Claude Richard. Os axiomas introduzidos por esses autores antecipam dos princípios propostos na geometria, como os que são discutidos por Robin Hartshorne.

Todavia, enquanto estes últimos introduziram axiomas de intersecção como forma de eliminar o recurso aos diagramas, não se vê o mesmo objetivo no século XVI.

A maneira como Finé procede na demonstração I.2 ilustra esse contraste. Embora ele dispusesse de princípios concernentes à interseção círculo-reta necessários em I.2, ele opta por prolongar o segmento de reta *DA* até o ponto *G* na circunferência do círculo *GHE.* Ou seja, ele opta por usar o Postulado 2 canonicamente, segundo a terminologia de Panza, ao invés do axioma que serviria para fundamentar discursivamente a intersecção. Ele não precisaria do novo axioma, como se pode concluir a partir da inspeção da versão do texto euclidiano de Jacques Peletier, o qual segue o mesmo procedimento canônico (também segundo a terminologia de Panza) sem precisar acrescentar nenhum tipo de princípio relativo à interseção círculo-reta. Ora, o mérito deste raciocínio é a possibilidade do Postulado 2 ser empregado de maneira genuinamente construtiva, o que nem mesmo se nota em Euclides; porém, os princípios arrolados por Finé e Peletier não sugerem que esta era a preocupação principal. Nem o recurso aos diagramas nem a prolongação arbitrária eram unanimamente rechaçadas. É notável, porém, a indeterminação sobre qual seria a formulação do Postulado 2, o que parece se refletir em maneiras distintas de se demonstrar as proposições euclidianas. Dasypodius & Herlin, bem como Clávio, falam em prolongações infinitas em relação a este postulado, ao passo que Peletier mantém a formulação euclidiana (aceita, portanto, a prolongação limitada) sem se preocupar em discutir o problema da infinitude.

De particular importância para as considerações feitas até o momento sobre a recepção a Euclides é o tratado *Della nuova geometria*, do filósofo Francesco Patrizi da Cherso (1529 - 1597)[461]. Publicada em 1587, a obra não se destaca por ser uma nova edição comentada dos *Elementos*, muito embora se reconheça ali o propósito de oferecer uma exposição da geometria plana. Ocorre que os pressupostos platonistas de Patrizi resultam numa interpretação bem diferente da relação entre matemática e física, mais especificamente, sobre o uso da geometria. É que Patrizi passa a considerar a geometria a ciência do espaço. A novidade introduzida por ele reside em sua reavaliação do estatuto ontológico dos objetos matemáticos, rejeitando destarte a definição tradicional (aristotélica) da geometria como a ciência das magnitudes contínuas. Esse espaço puro é, dentre outros atributos que teremos a

[461] Francesco Patrizi da Cherso foi um filósofo e humanista italiano. Além de professor de filosofia na Universidade de Ferrara, foi secretário do duque Alfonso II D'Este. Em 1591, publicou sua mais vultosa e polêmica obra filosófica, *Nova de Universis Philosophia*. Contemporâneo de Giordano Bruno, Patrizi notabilizou-se tanto pela defesa do platonismo quanto por suas críticas ao aristotelismo. Ele levou adiante os argumentos a favor da aplicação da matemática aos fenômenos físicos, embora essa tese não tenha sido estranha aos seguidores de Aristóteles, como Clávio.

oportunidade de discutir, ontologicamente independente dos corpos e infinito em ato. Dessa forma, torna-se possível articular uma concepção infinitista das retas euclidianas.

À continuidade do que foi previamente discutido, este capítulo vai debater, primeiramente, a inclusão de novos axiomas de continuidade e intersecção. Ver-se-á que embora axiomas dessa natureza sejam considerados na fundamentação da matemática contemporânea como uma maneira de eliminar o recurso ao diagrama, essa não era a preocupação principal no século XVI. Em autores como Oronce Finé e Claude Richard os axiomas de intersecção são usados numa ou noutra proposição, mas nunca sistematicamente. As inferências diagramáticas — inclusive as relacionadas com intersecção — ainda são recorrentes nas edições dos *Elementos* publicadas por eles. A reforma mais radical aparece com Patrizi, que introduz na geometria euclidiana o espaço infinito. Embora não tenha participado diretamente da *quaestio de certitudine mathematicarum*, Patrizi subscreveu às teses de Piccolomini acerca das limitações da metodologia científica aristotélica no tocante às matemáticas. Mas isso não foi o bastante. Patrizi toma para si a missão de eliminar das matemáticas a ontologia aristotélica das magnitudes.

7.3. O estatuto demonstrativo do Postulado 2

Conforme se observa a sucessiva aplicação dos postulados de construção, o leitor poderia ser levado a concluir que a prática matemática euclidiana apenas contempla magnitudes finitas. Consideremos o Postulado 2. Esse princípio permite construir prolongações de segmentos retilíneos. Essa é a leitura mais comum, como se no comentário de Thomas Heath[462]. Ocorre que, do ponto de vista da geometria contemporânea que ele adota, trata-se de segmentos de retas infinitas em ato[463]. Ainda no âmbito dos comentários aos *Elementos*, Bernard Vitrac[464] também entende que as retas euclidianas são segmentos retilíneos, mas argumenta que o Postulado 2 permite falar em retas potencialmente infinitas. A razão para isto é que o ato de produzir uma linha reta finita pode sempre ser repetido. O que não fica muito claro, porém, tanto em um caso como no outro, é se tal interpretação é compatível com o método construtivo euclidiano.

[462] Heath, *The Thirteen Books of the Elements*, Cambridge, 1908, p. 196-199.
[463] O infinitismo da geometria contemporânea, convém lembrar, foi o que motivou as críticas de Lassalle Casanave & Panza à formalização de Avigad *et al*.
[464] Vitrac, *Les Éléments*, 1990, pp. 168-169; 185-194.

A admissão de magnitudes infinitas encerra uma série de reflexões sobre esse conceito e suas implicações na prática matemática. Aristóteles rejeitou a existência da infinitude atual e não admitia que houvesse magnitudes infinitas. Eis como os comentadores de Euclides viam a questão no século XVI. Quando Heath e Vitrac estão falando sobre a infinitude, a referência principal é a geometria contemporânea de David Hilbert, a qual reconhecidamente está ancorada naquele conceito. O sistema axiomático de Hilbert, porém, não contempla nenhum princípio equivalente aos postulados de construção, embora ele não tenha ignorado a importância do método construtivo. Tal é o caso, como já esclarecido, porque esse sistema *implica* a existência de conjuntos infinitos de pontos, retas (também infinitas em comprimento) e planos, de maneira que seria uma redundância a inclusão de uma lista de princípios concernentes à construção de retas e círculos ao estilo euclidiano.

Não obstante, nota-se que nos axiomas do Grupo II Hilbert verbaliza as relações de ordem (estar-entre) dos pontos sobre a reta, bem como as intersecções. (O Sistema E de Avigad *et al* também contempla axiomas dessa natureza.) Essas relações, nos *Elementos*, dependem fundamentalmente do recurso aos diagramas. Embora Hilbert não tenha se prestado ao trabalho de elucidação conceitual sobre o método construtivo euclidiano, é oportuno considerar esses axiomas do Grupo II sob uma perspectiva mais ampla, de maneira a realçar as discussões filosóficas acerca da natureza dos objetos matemáticos.

O sistema axiomático de Hilbert encerra um longo ciclo de debates sobre os princípios matemáticos. Deve-se notar, nesse sentido, que vários dos seus axiomas são antecipados nos séculos XVI-XVII. Esse é o caso, em especial, dos axiomas do Grupo II. Há uma brevíssima menção nos *Comentários* de Proclus a um princípio proposto por Pappus acerca da divisibilidade das retas num ponto, mas o comentador não volta a esse tema, nem mesmo quando Euclides usa o diagrama para justificar esse tipo de relação[465]. A observação que Proclus atribui a Pappus parece ser uma consequência de uma tese de Aristóteles. Ao diferenciar o gênero das magnitudes em contínuas (estudadas pela geometria) e discreta (estudadas pela aritmética), ele esclarece que as magnitudes contínuas têm um limite comum no qual coincidem as suas partes. Dessa maneira, o ponto é o limite comum das linhas; as linhas são o limite comum das superfícies; as linhas ou as superfícies são limites comuns dos corpos[466]. Segue-se daí que sempre há um ponto de intersecção entre duas retas que se cortam. E no entanto, axiomas de intersecção e continuidade só começam a aparecer nas versões

[465] Proclus, *In Euclidis*, 198. Ver, porém, o argumento *ad absurdum* na página 376.
[466] Aristóteles, *Categorias*, 6, 5a1-6; *Física*, V.3, 227a1-7. Ver também *Metafísica*, B 5, 1002a28-b5 e, especialmente, K 2, 1060b11-19.

modernas dos *Elementos*[467]. Como já esclarecido, a inclusão de novos axiomas decorria em grande parte da recepção dos comentários de Proclus, quer seja pelos princípios mencionados por ele como necessários à demonstração, quer seja pela crítica que faz à dependência dos diagramas — ainda que a completa dispensabilidade não tenha sido considerada por ele.

Um dos primeiros autores modernos a acrescentar novos postulados à geometria euclidiana foi Oronce Finé, muito embora a sua versão dos *Elementos* seja mais fiel a Euclides[468]. Finé mantém os 5 postulados de Euclides, mas acrescenta os seguintes (na mesma ordem):

6. *Traçar uma linha reta ou oblíqua a partir de um ponto dado dentro da figura, de forma a cortar os lados ou a circunferência da figura até alcançar qualquer ponto externo no mesmo plano*[469].
7. *Traçar uma linha reta a partir de qualquer ângulo de figuras retas, que incida opostamente ou em um lado ou ângulo; dividindo tanto o ângulo quanto o lado*[470].

A inclusão desses princípios parece antecipar as observações de Biancani, Borelli e Barrow acerca da natureza entimemática do raciocínio matemático. Como tais relações sempre são extraídas dos diagramas, a verbalização acima mostraria qual princípio está sendo subentendido pela audiência. Apesar da novidade, não se sabe exatamente o que Finé pretendia com esses axiomas. Em sua tradução dos *Elementos*, publicada em 1536, esses axiomas não são incluídos — provavelmente por uma questão de fidelidade filológica —, nem são mencionados como justificação das inferências diagramáticas.

Essa mesma hesitação se percebe no texto de Claude Richard[471]. A edição de Richard se baseia na de Clávio, mas traz uma lista nova de princípios de intersecção que não estão

[467] Recentemente, Vincenzo de Risi argumentou que não há muitos indícios na literatura disponível que possam sugerir que as intersecções fossem um problema fundacional na Antiguidade. Ver De Risi, Did Euclid Prove Elements I, 1? The Early Modern Debate on Intersections and Continuity. P. Beeley, Y. Nasifoglu & B. Wardhaugh (Eds.), *Reading Mathematics in the Early Modern Europe. Studies in the Production, Collection, and Use of Mathematical Books*, London, 2020, p. 12-32.
[468] Finé, *Protomathesis*, Paris, 1532. Oronce Finé foi professor de Pierre de la Ramée, Jacques Peletier e Pierre Forcadel. Todos esses personagens deixaram traduções dos *Elementos*.
[469] Finé, *Protomathesis*, Paris, 1532, Livro II, cap. VII, f. 54v: Rectam uel obliquam lineam, a dato puncto quod intra figuram est, ad exterius quodcunq punctum in eodem plano signatum eductam ipsius figuræ latera uel ambitum intersecare.
[470] Finé, *Protomathesis*, Paris, 1532, Livro II, cap. VII, f. 54v: Rectam lineam, a quouis rectilinearum figurarum angulo, in oppositum uel latus uel angulum incidentem; utrunq et angulum et latus diuidere.
[471] Claude Richard (1589 – 1664). v. Biblioteca de la Real Academia de la Historia, Colección de Cortes, 9/2680 -568, f. 1 Professor jesuíta que lecionou no Colegio Imperial de Madrid (comandado pela Companhia de Jesus até meados de 1760). Publicou os seguintes textos: *Euclides elementorum geometricorum libros tredecim Isidorum et Hypsidem et Recentiores de Corporibus Regularibus, et Procli propositiones geometricas* (Antwerp, 1645); *Apollonii Pergaei Conicorum libri IV cum commentariis Claudii Richardi* (Antwerp, 1655).

presentes neste[472]. Algo que chama atenção nesses princípios é que conseguem verbalizar tipos de relações que, nos *Elementos*, são sempre diagramáticas. Ainda assim, a dispensabilidade dos diagramas não é cogitada nem por Finé nem por Richard[473].

Por outro lado, há duas novidades conceituais nesses princípios: 1) introduzem a ideia de espaço; 2) introduzem retas infinitas. Nota-se, ademais, que a linguagem normativa de Euclides é gradativamente abandonada em favor de uma linguagem descritiva com o aparecimento de princípios matemáticos que explicitamente mencionam o infinito. Dentre as várias edições dos *Elementos,* as de Dasypodius & Herlin, de 1566, bem como as de Cristóvão Clávio, de 1574, e a de Claude Richard, de 1645, associam o Postulado 2 ao infinito, enquanto que a de Jacques Peletier, de 1557, ignora solenemente a questão. Já a edição de Giovanni Alfonso Borelli, de 1658, traz uma observação ao estilo de Proclus, dizendo que a prolongação é feita no intelecto.

O termo *apeiron*, comumente traduzido como "infinito", é mencionado só em 4 ocasiões nos *Elementos*: na Definição 23, no Postulado 5, o Postulado das Paralelas, e nas demonstrações 12 e 22 do Livro I. A Definição I.23, assim como as demais, não dá nenhuma instrução de como construir o referido objeto que define; pouco ou nada diz sobre a existência destas magnitudes. Aliás, até mesmo a expressão *apeiron*, neste contexto, pode soar ambígua, uma vez que ora traduz "infinito", ora "indeterminado". Que uma reta seja "produzida indefinidamente", como se traduz comumente, poderia significar uma prolongação arbitrária da reta em qualquer direção, sem que haja um ponto ou qualquer outro objeto geométrico marcando seu limite. Mas, este é um tipo de procedimento que pode ser feito com o auxílio do Postulado 2[474].

Proclus deixa algumas reflexões mais demoradas sobre o infinito nas demonstrações I.12 e I.22. Adotando um tom assertivo, ele nega a existência de retas infinitas na geometria euclidiana, seja a referida infinitude em *ato*, como supostamente seria o caso em I.12, seja em

---

[472] São 30 axiomas nessa versão, dos quais 8 tratam de intersecção, a saber, XI, XIII (o Postulado das Paralelas), XXII, XXIII, XXVI-XXIX.

[473] Veja-se também *Euclides restitutus* (Pisa, 1658) de Giovanni Alfonso Borelli. O Axioma XIII trata especificamente de intersecção.

[474] Proclus corretamente notou que sequer seria preciso falar em infinitude na Definição I.23. Ele cita, com efeito, a seguinte definição: *retas paralelas são retas em um só plano que nem divergem, nem conversem, mas têm todas as perpendiculares traçadas de uma a outra iguais entre si*. Essa reformulação, como se nota, se presta a um melhor entendimento de paralelismo, uma vez que o cerne desta relação não parece estar na prolongação arbitrária das retas, senão no fato de que não se tocam e são equidistantes. No caso do Postulado 5, o vocábulo *apeiron* aparece numa oração subjuntiva, diferente do que ocorre no Postulado 2, onde Euclides usa o imperativo. Proclus não deixa uma anotação específica sobre isso, mas aproveita para se queixar de Euclides quando este afirma que as retas convergem cada vez mais à medida em que são produzidas indefinidamente, o que seria, segundo Proclus, um raciocínio plausível, mas não necessário, como exige o conhecimento geométrico.

potência, como poderia ser sugerido em relação ao Postulado 2. Na melhor das hipóteses, o apelo ao infinito decorreria de alguma necessidade argumentativa. Se a reta dada fosse finita, o ponto a partir do qual uma perpendicular seria construída poderia cair sobre a extensão daquela reta, de modo que a proposição não seria demonstrada. Logo, conclui Proclus, o infinito naquelas duas demonstrações é apenas hipotético. Proclus ainda acrescenta outro argumento para explicar o porquê do infinito não ter cidadania na geometria. Em primeiro lugar, argumenta ele, a infinitude não pertence a nenhum corpo sensível, de modo que a sensibilidade não poderia ser sua origem. Todavia, não se poderia dizer também que as ideias imutáveis têm extensão e magnitude; pois não podem ser decompostas de tal e qual maneira. O infinito, portanto, é introduzido pela imaginação (*phantasia*) como uma referência àquilo que, em sua imensidão, não poderia ser compreendido[475].

Como se vê, a transição do finitismo euclidiano, por assim dizer, para o infinitismo hilbertiano não é gratuita. Um outro autor a ser mencionado é Francesco Patrizi da Cherso, que escreveu *Della nuova geometria,* em 1557. O curioso neste texto é o entendimento da geometria como a ciência do espaço em si. Patrizi enuncia o seguinte princípio: *As ciências matemáticas não são abstraídas das coisas naturais; e não estão na phantasia ou no intelecto; o espaço é seu objeto.* Note-se, pois, como este princípio nega a associação feita por Proclus — e repetida por vários comentadores modernos, a exemplo de Clávio e Peletier — entre geometria e imaginação. Esse novo tratamento da geometria, portanto, poderia resolver os dois problemas aqui assinalados de uma só vez. Se o espaço é infinito, bastaria dizer doravante que as retas euclidianas são infinitas. Elimina-se destarte a prolongação arbitrária. As intersecções e relações de ordem, portanto, passam a ser determinadas a partir de axiomas espaciais, não mais dependendo do Postulado 2. Antes, porém, seria preciso articular uma nova ontologia do espaço.

7.4. A filosofia do espaço de Francesco Patrizi

Entre fins do século XVII e meados do XVIII a geometria passou a estar cada vez mais associada ao estudo das propriedades do espaço, quer dizer, acerca duma extensão infinita, homogênea que abrangeria todo o mundo físico. Isso é devido, em grande medida, à publicação do *Principia Mathematica* de Isaac Newton. De fato, o historiador Alexandre Koyré argumenta que uma dos principais contribuições da física moderna foi a introdução

[475] Por outro lado, Proclus, tal como Aristóteles, admitia a existência da divisão (potencialmente) infinita da extensão.

desse espaço abstrato e infinito da geometria euclidiana[476]. As observações feitas até aqui, porém, apontam para uma escassez de reflexões filosóficas sobre o conceito de espaço no contexto das reformas axiomáticas dos *Elementos*. Por sua vez, as questões relativas à infinitude das magnitudes matemáticas estão imersas em problemas ontológicos e teológicos herdados em grande medida da Escolástica.

Contrariamente ao que diz Koyré, a geometria euclidiana não era entendida como a ciência do espaço. Os estudiosos da obra euclidiana viam a geometria como o estudo das magnitudes contínuas, uma declaração que ecoa o pensamento de Aristóteles[477]. Neste sentido, tanto Clávio quanto Piccolomini compartilhavam a mesma visão sobre o objeto das matemáticas[478]. Portanto, se por um lado a *quaestio de certitudine mathematicarum* escancarou problemas metodológicos no seio do aristotelismo ao chamar atenção para a suposta inadequação das demonstrações euclidianas à doutrina da ciência demonstrativa, a ontologia matemática, por outro lado, permanecia ainda atrelada a Aristóteles. Paralelamente a isso, a emergência duma nova concepção de espaço tornou possível reavaliar por completo a própria natureza da geometria. Foi precisamente o que tentou fazer o filósofo italiano Francesco Patrizi (1529 - 1597). No contexto da reforma axiomática dos *Elementos*, perceberemos que a relação entre espaço e geometria foi no sentido inverso ao proposto por Koyré: não foi o espaço que foi geometrizado, senão que foi a geometria que foi espacializada.

Patrizi começou sua carreira acadêmica na Universidade de Ferrara, em 1578, onde ministrou filosofia platônica[479]. Em 1592, pouco depois de publicada a *Noua philosophia*, Patrizi foi para Roma, onde viria a ocupar a cadeira de professor de filosofia platônica em La Sapienza. Permanece lá até sua morte, em 1597. As reflexões sobre o espaço (físico e matemático) atravessam as décadas de 1570-1590. Sua primeira obra de cunho filosófico é *Discussiones peripateticae* (1571), cujo objetivo principal, como o nome dá a entender, era

---

[476] Koyré, Galileo and the scientific revolution of the seventeenth century. *The Philosophical Review*, v. 52, n. 4, 1943a. p. 337; Galileo and Plato, *Journal of the History of Ideas*, vol. 4, no. 4, 1943b, p. 403-404, 412; *From the Closed World to the Infinite Universe*, Baltimore, 1957, Introdução.

[477] Ver *Categorias*, 6; *Segundos analíticos*, I.7, 75b5; I.10, 76a35; I.32,88b29; *Física*, V.3, 226b18-227b-2; *Metafísica* Δ(V).13, 1020a6-33; *Ética nicomaquéia*, VI.11, 1143a3-4; *Retórica* I.2, 1355b30-31. Compare-se com *De caelo,* I.1, 268a7.

[478] Ver, em especial, Piccolomini, *Della filosofia naturale* (1569, p. 47v). Ver também Finé, *Protomathesis*, Paris, 1532, f. 50r.

[479] Patrizi foi um ardoroso defensor do pensamento platônico, tanto quanto foi crítico da escolástica aristotélica. Em uma carta a Baccio Valori, em 1587, Patrizi se declara um filósofo platônico, tendo começado sua carreira acadêmica acompanhando o pensamento de Facino. Patrizi fala do amor por Platão na primeira página do último apêndice ao *Nova philosophia* (*Veritatis studiosis*), que é uma reprodução parcial do primeiro capítulo do tomo 3 do *Discussiones peripateticae*. Deve-se ter em mente, porém, que seu platonismo é tão eclético a ponto de estabelecer uma linha de continuidade de Noé até o pensamento renascentista, incluindo Platão, obviamente, mas também Zoroastro, Hermes Trismegisto, além do misticismo em torno dos oráculos caldeus.

discutir criticamente o pensamento de Aristóteles, comparando-o entrementes com o de Platão. Nota-se nessa obra, em primeiro lugar, que Patrizi estava familiarizado com o debate sobre a certeza matemática iniciado por Piccolomini. Patrizi viu ali a oportunidade de abandonar a doutrina da ciência demonstrativa em favor da dialética platônica[480]. Em segundo lugar, e mais relevante para esta discussão específica, percebe-se já nessa obra as críticas ao conceito aristotélico de lugar[481].

Na década seguinte Patrizi consegue sistematizar uma versão alternativa ao lugar aristotélico no livrinho *De rerum natura* (1587), onde explicitamente diferencia, e pela primeira vez, até onde se sabe, o espaço físico (*spacio physico*) e o espaço matemático (*spacio mathematico*)[482]. Naquele mesmo ano Patrizi publicou o *Della nuova geometria*, obra na qual tentou, à la Euclides, estabelecer demonstrações a partir de uma lista de primeiros princípios sobre a natureza do espaço, ainda que a obra em si não apresente nenhum novo resultado matemático e sequer consiga ir além da geometria plana elementar sem a teoria das proporções (Livros I-IV dos *Elementos*). Na década seguinte, finalmente, Patrizi reúne suas ideias no volumoso *Noua de universis philosophia* (1591), texto no qual o *De rerum natura* é reproduzido quase palavra por palavra[483].

A estratégia principal de Patrizi em *Noua de universis philosophia* consiste em defender dialeticamente as teses rejeitadas por Aristóteles no Livro IV da *Física*[484]. Com exceção do conceito de *spacio mathematico*, como logo veremos, nenhuma dessas teses era novidade no século XVI[485]; algumas já haviam sido consideradas na Idade Média, ao que se

---

[480] Patrizi, *Discussiones peripateticae*, III, Livro IV, especialmente p. 318.

[481] *Idem,* especialmente vol. II, VI, 246–248.

[482] O título faz menção a dois livros homônimos conhecidos por Patrizi: o de Lucrécio, descoberto no séc. XV — e bem mais famoso, diga-se —, e o de Telésio. Ambos os autores antecipam Patrizi nas críticas ao *locus*. Vide, em especial, Telésio, *De rerum natura*, caps. XXV-XXVIII. Para a influência de Telésio, vide De Risi (2016, pp. 73).

[483] Na epístola dedicatória do *Noua de universis philosophia*, endereçada ao papa Gregório XIV, Patrizi urge pela substituição do pensamento aristotélico nas universidades da Europa pelo platonismo, supostamente mais compatível com os dogmas cristãos. Muitas das acusações que Patrizi lança contra Aristóteles são patentemente conspiratórias. Apesar disso, Patrizi precisou se explicar junto à Inquisição. Patrizi se defende das acusações em dois textos: *Apologia* e *Declarationes*, e *Emendatio in libros suos novae philosophiae*. Assim, uma segunda edição surge em 1593, desta feita em Veneza. Tudo foi em vão. Após sua morte, *Noua de universis philosophia* seria incluída no Index dos Livros Proibidos. Roberto Bellarmino até mesmo cogitou o fim da cátedra de filosofia platônica. A última edição do livro é de 1640, a qual sequer traz o nome do autor. Ver L. Firpo, 'Filosofia italiana e controriforma', *Rivista di filosofia*, 41, 1950, 150-173.

[484] Ver De Risi (Ed.), *Mathematizing Space The Objects of Geometry from Antiquity to the Early Modern Age.* Suíça, 2015; do mesmo autor, Francesco Patrizi and the new geometry of space. In: *Boundaries, Extents and Circulations: Space and Spatiality in Early Modern Natural Philosophy*, Suíça, 2016b, p. 55-106.

[485] No século XVI, os debates sobre a natureza do espaço e do vácuo geralmente eram circunscritos ao âmbito da filosofia natural e da metafísica. Desde a perspectiva escolástica, o filósofo português Pedro da Fonseca (1528 – 1599) discute os conceitos de *locus* e *spatium* no seu *Commentariorum in Metaphysicorum Aristotelis Stagiritae Libros,* 1589, Tomo II, Livro V, cap. XIII, q. 7. Esse texto ilustra as dificuldades encontradas pelos jesuítas em manter as teses de Aristóteles perante as críticas de Filopono e Simplício. A esse respeito, ver Pierre Duhem, *Le systeme du monde*; Edward Grant, *Much Ado about Nothing: Theories of Space and Vacuum from the Middle*

somaram textos de autores críticos a Aristóteles, especialmente dos da cepa “neoplatônica”, como Plotino, Proclus e Filopono[486], além da cosmologia estóica[487]. Mas, para Patrizi, seria preciso conciliar sua “nova filosofia” com a já consolidada teologia cristã. Eis porque ele diz, logo no início da seção relativa ao espaço, que esta foi a primeira criação de Deus. Tudo que existe está em um *onde*[488]. “Mas isso é o próprio espaço”, conclui Patrizi. “Pois todas as coisas, se não estão nalgum lugar, estão em lugar algum; e se estão em lugar algum, então sequer existem”[489]. Ou seja, tanto o corpo quanto a alma estão no espaço. O espaço é uma coisa que existe antes dos corpos que nele estão (e, portanto, do mundo físico) e, por isso, pode continuar a existir mesmo que não haja corpo algum. Preserva-se destarte o dogma cristão da criação do mundo *ex nihilo*. O espaço precede a matéria e esta é criada por Deus[490].

Essa concepção, por assim dizer, “substancializada” constitui a principal linha de argumentação de Patrizi. Para ele, esse espaço (*spacium*) primordial e absoluto é aquilo que os antigos chamavam lugar (*tópos* ou *locus*) ou, mais precisamente, o que geralmente se entende como o intervalo (διάστημα) entre as coisas[491]. Portanto, o intervalo entre as coisas existe independentemente das coisas ali postas e as antecede. Diz Patrizi:

> Que é, então, esse lugar [*locus*] senão espaço [*spacium*] com comprimento e largura, mesmo que a profundidade, que é mais propriamente o lugar, venha a ser ridiculamente omitida? Que outra coisa seria essa magnitude em

Ages to the Scientific Revolution, 1981, p. 205. Para uma discussão mais profunda acerca da recepção do conceito aristotélico de *locus* no início da Modernidade, com especial referência aos jesuítas, ver Paul Richard Blum “Early Jesuit Philosophers on the Nature of Space”, in: Cristiano Casalini (ed.), *Jesuit Philosophy on the Eve of Modernity*, Leiden, 2019, p. 137-165.

486 Sobre o debate sobre os conceitos de lugar e espaço no helenismo tardio, com especial atenção aos estóicos e neoplatônicos, ver Duhem, *Le systeme du monde*, vol. 1, Part 1, ch. 5, p. 297-350.

487 Dentre as mais importantes fontes sobre a concepção estóica do espaço, decerto Diógenes Laércio, VII.141. No século XVI, a cosmologia estóica estava disponível nos comentários de Simplício (Veneza, 1566) e Filopono (tradução de Joanne Baptista Rasario), bem como nos textos de Cleômedes e Plutarco (*Moralia V: De defectu oraculorum*, 425D-E; *Moralia XI: De placitis philosophorum*, 874D; *Moralia XIII: De stoicorum repugnantis,* 1054C-D). Patrizi estava a par desses autores. Em 1583 ele consegue publicar suas traduções do *Elementa theologica et physica*, de Proclus, e *Expositiones in Aristotelis*, um texto espúrio atribuído a Filopono. O nome de Patrizi também aparece como proprietário de 75 manuscritos da biblioteca do Mosteiro do Escorial, na Espanha. Sobre o impacto da filosofia antiga sobre o conceito moderno de espaço, vide *Much Ado about Nothing: Theories of Space and Vacuum from the Middle Ages to the Scientific Revolution*, 1981, cap. 8.

488 Fazemos menção à maneira substantivada com que Aristóteles designa o pronome relativo de lugar: ἣ ποὺ (*hē pou*), i.e. (ao pé da letra), *o onde*. A tradução de Boécio mantém-se fiel ao usar *ubi* (onde).

489 Patrizi, *Noua de universis philosophia*, 1591, 61r: Id aute ipsum spacium est. Omnia namque et corporea et incorporea, si alicubi non sint nullibi sunt, si nullibi sunt, neque etiam sunt.

490 Patrizi nega que Deus esteja no espaço em *Discussiones* (IV, IX p. 463); a afirmação volta a se repetir em *Noua philosophia* (*Panarchia*). Mas essa não é a única complicação a ser considerada. Uma vez que Patrizi assume que o espaço é infinito em ato, ele precisa considerar o seguinte problema: como Deus criou outra entidade infinita em ato diferente de si?

491 Historicamente *tópos* foi traduzido como *locus* (lugar). O termo *spatium* (espaço), embora fosse uma opção igualmente aceitável, era usado como tradução de διάστημα. Essa ambiguidade não passou despercebida na Idade Média. Simplício observou que *tópos* tanto pode significar o limite dum corpo individual, quanto o receptáculo comum de vários (ou todos) corpos (*Aristotelis Categorias commentarium*, 364.22-35). A partir da Renascença, *spatium* passa a ser o termo mais usado, afastando-se cada vez mais do *locus*.

> relação à qual todos os movimentos — para cima, para baixo, de lado e em círculo — são?[492]

Para Patrizi, também o vazio (*vacuum*), concebido independentemente dos corpos, é coextensivo ao conceito de espaço. Diz ele: "Em verdade, porém, essas coisas são as mesmas: vazio [*vacuum*], espaço [*spacium*], pleno [*plenum*] e lugar [*locus*]". Quando não há corpo algum nesse espaço primordial, argumenta Patrizi, provavelmente pensando nos primeiros instantes da Criação, diz-se que é vazio; quando esse espaço é preenchido (*plenum*) por um corpo, diz-se que é o seu lugar. Cada corpo físico já ocupa um lugar pelo simples fato de existir. Mas, para que esse espaço primordial possa acomodar corpos tridimensionais, é preciso que ele seja também tridimensional. "E, assim, é necessário que este vazio tenha três dimensões, a saber, comprimento, largura e profundidade (como o lugar). O vazio não é outra coisa senão espaço com três dimensões"[493].

O mundo é abarcado pelo vazio, de maneira que, relativamente ao mundo, é finito; considerado em si mesmo, infinito. E o espaço é infinito *em ato*, não *em potência*. De novo Patrizi:

> Portanto, como não é limitado nem pelo término de um corpo, pelo término de um segundo espaço, por seus próprios términos, nem por coisas incorpóreas, é preciso concluir que aquele espaço afastado do mundo se afasta para o infinito e é infinito. Mas de que tipo de infinito é: potencial (por assim dizer) ou atual? Se fosse considerado potencial, seguir-se-ia necessariamente que agora é finito e mais tarde se tornaria infinito, mas ainda apenas potencialmente infinito. Mas se isso for um absurdo, concluímos que é atualmente infinito. Mas é infinito em relação a linhas, superfícies ou também profundidades? Com respeito a todos. Pois se é infinito com respeito a um deles, necessariamente também é infinito com respeito a todos, exceto onde toca o mundo ou onde é limitado pela capacidade de nossas mentes. Mas este término não altera sua natureza, nem o remove de sua infinidade[494].

---

492 Patrizi, *Noua de universis philosophia,* 1591, f. 61r: Quid enim illi, aliud est locus, quam spacium, longum, latumque? tametsi in loco profundum, qui proprie magis locus est, ipse ridicule ommiserit [sic]? quid aliud illi eft magnitudo, super qua ei sit motus omnis, sursum, deorsum,in latus, in cicuitum ?

493 Patrizi, *Noua de universis philosophia,* 1591, f. 62c-d: Re autem vera eadem res essent vacuum, spacium, plenum, & locus. Qua plenum corpore est, esse locum qua vero sine corpore est, esse vacuum. Atque ideo vacuo huic necesse est, communes esse tres illas dimensiones [scilicet] longitudinem, latitudinem, & profundicate, sicuti & loco. Et vacuum ipsum, non aliud esse, quam trine dimesum spacium.

494 Patrizi, *Noua de universis philosophia,* 1591*,* f., 64a-b: Cum ergo, nec corporis terminis, nec spacii alterius, nec suis, nec incorporeis finiatur, necessario concludicur, spacium illud a mundo recedens, in infinitum recedere, et infinitu esse. At qua nam infinitate? potentiali ne (ut ita loquar) an actuali? Sane si potenciali diceretur, sequeretur necessario, ut nunc finitum esset, postea infinitum fieret, et quidem in potentia adhuc. Quod si dictu sit absurdum, nos spacium illud, actu infinitum esse concludemus. At infinitum, lineis ne? an superficiebus, an etiam profunditatibus? Sane omniabus. Nam si infinitum uno sit, omnibus etiam necesario est infinitum: præterquam ubi mudum tangit, uel mentis nostræ conceptione terminatur. Sed hic terminus naturam eius non mutat, nec ab infinitate sua dimouet.

Por fim, Patrizi tenta esclarecer a posição desse conceito de espaço entre as categorias tradicionais (i.e., aristotélicas). Diz, com efeito, que o espaço é *extensio hypostatica*, embora defenda que o espaço não possa ser classificado em nenhuma das categorias por ser anterior a todas[495]. Agora, ainda que seja um tipo diferente de substância — um tipo não esclarecido, diga-se —, Patrizi considera se se trata duma substância corporal ou incorporal:

> O que é então, um corpo ou uma substância incorpórea? Nenhum, mas antes um meio-termo entre ambos. Não é um corpo, porque não é um cópia *antitypos*, nem tem resistência, nem é um objeto de, ou sujeito a, visão, toque ou a qualquer outro sentido. Tampouco é incorpóreo, sendo tridimensional. Tem comprimento, largura e profundidade — não apenas uma, duas ou várias dessas dimensões, mas todas elas. É um corpo incorpóreo e um não-corpo corpóreo. E cada uma dessas [dimensões] subsiste por si, existe por si, e existe em si, de maneira que também permanece sempre fixo por si e em si mesmo, e não muda a essência ou o lugar, nem em suas partes nem no todo[496].

A tese segundo a qual o espaço é um (tipo de) corpo é uma consequência já antecipada por Aristóteles, uma vez que a tridimensionalidade é um atributo dos corpos e só acidentalmente seria predicada do *tópos*. O espaço, portanto, teria comprimento, largura e profundidade porque os corpos também as têm, não o inverso. Patrizi não chega a identificar o espaço e o corpo, mas diz várias vezes que o espaço é um corpo imaterial. Em resumo, Patrizi entendia por espaço o lugar (em um sentido supostamente aristotélico), o intervalo e o vazio (vácuo). O espaço não é o limite dos corpos, tampouco é a relação entre eles, mas antes algo que os precede; não é forma nem matéria, embora tenha três dimensões, como os corpos, mas não seja tangível aos sentidos. É infinito em ato, mas pode ser quantificado em suas partes.

7.5. Espacialização da geometria euclidiana

Pode soar trivial a associação entre a geometria e o espaço hoje em dia, mas este não era o caso no século XVI. Não se vê, por exemplo, discussões sobre este conceito nos autores já mencionados, tampouco a reforma axiomática fez dos *Elementos* um tratado sobre o

---

[495] Patrizi, *Noua philosophia*, (65b,c). Pedro da Fonseca também encontra dificuldades em classificar o *spatium* na lista das categorias. Fonseca não demonstra conhecer as teses de Patrizi, mas certamente sabia dos argumentos neoplatônicos difundidos à época.

[496] Patrizi, *Noua de universis philosophia*, 1591, f., 65b,c: Quid igitur corpus ne est, an incorporea substantia? Neutrum, sed medium utriusque. Corpus non est, quia non est antitypos, aut resistens, aut renitens, non visui, non tactui, sensuum nulli obiicitur, aut subiicitur. Incorporeum rusus [*sic*. Leia-se rursus] non est, quia trine dimetitur. Longitudinem, latitudinem profunditatemque, non unam, non duas, aut plures habet, sed cunctas. Itaque corpus incorporeum est, & noncorpus corporeum. *A*tque utrumque [i.e., dīmēnsiōnēs] per se substans, per se existens, in se existens, adeo, ut etiam per se stet semper, atque in se stet: neque essentiam, neque locum mutet, nec partibus, nec toto.

espaço. Praticamente todos os estudiosos da obra euclidiana durante os séculos XVI e XVII subscreviam à definição aristotélica da matemática como a ciência das magnitudes. Esses comentadores também viam como compatíveis a tese abstracionista atribuída a Aristóteles e o caráter intermediário das matemáticas (*inter Metaphysicam et naturalem scientiam*), tese essa que Proclus associa a Platão como condição para a aplicação da geometria ao mundo físico[497]. É precisamente aí que aparece a metafísica do espaço de Patrizi. O seu projeto se alicerçou sobre o entendimento de que ciência alguma deveria ocupar-se dos acidentes da substância. Ora, se a magnitude é um acidente da substância e o espaço é, ou passa a ser, com Patrizi, uma substância que antecede e abarca todos os demais entes, então a geometria só pode ser o estudo desta substância primária. E posto que o espaço é infinito em ato, suas dimensões também são infinitas em ato.

Como já antecipado, as teses de Patrizi sobre o espaço físico não eram uma grande novidade no século XVI. Pode-se atribuir a ele, é verdade, a primeira exposição sistemática daquele conceito antes de Newton. O que destaca Patrizi em relação a seus predecessores[498] — até mesmo os antigos — é a postulação dum *spacium mathematico*. A importância conferida às matemáticas coaduna-se com o platonismo professado por Patrizi e seus contemporâneos. Era bem difundida a crença segundo a qual somente Platão compreendia a matemática como a chave interpretativa do Livro do Mundo, uma metáfora já presente em Proclus e que ganharia fama com Galileu[499]. Ora, uma vez que Patrizi não aceita a distinção clássica, i.e., aristotélica, entre lugar e quantidade, e lugar é espaço, ou mais precisamente, um aspecto do espaço; o espaço, por sua vez, é quantificável. Assim, as magnitudes são acidentes do espaço, não mais dos corpos. Portanto, a geometria, que tradicionalmente foi definida como a ciência das magnitudes contínuas, passa a ser a ciência do espaço.

> Pois, assim como a parte seccionada do espaço [que está] entre dois pontos é uma linha, e aquela entre três pontos é a primeira superfície — um triângulo — também a parte do espaço que está contida em quatro pontos forma o primeiro corpo, a saber, uma pirâmide. Por conseguinte, se um espaço estiver contido por cinco, seis, ou qualquer número maior de pontos, estes não formarão nada além do corpo, i.e., a dimensão tríplice, a saber, longa, ampla

---

[497] A aplicação da matemática ao estudo dos fenômenos naturais, porém, não era rechaçada pelos escolásticos do século. XVI. Clávio, por exemplo, certamente compartilhava dessa tese, como se nota em seus argumentos em favor da prioridade da matemática em relação à filosofia natural.

[498] Por exemplo, as reflexões de Telésio sobre os objetos da matemática — que segue uma linha de raciocínio aristotélica — estão no Livro VIII, cap. 4, bem distantes dos capítulos concernentes ao espaço.

[499] Vide, por exemplo, Proclus, *In Euclidis*, 23.5-11. Essa interpretação continuaria a ser difundida após a morte de Patrizi, como se nota no livro *In universam Platonis et Aristotelis philosophiam praeludia, sive de omparatione Platonis et Aristotelis* (1597) de Jacopo Mazzoni, com quem Patrizi já havia discutido sobre o conceito de espaço. Mazzoni viria a ser professor de filosofia de Galileu.

> e profunda, pela qual medimos as partes do espaço infinito (pois, o todo sendo infinito, não medimos)[500].

Os objetos matemáticos existiriam independentemente do mundo físico e alguns seriam infinitos, quais sejam, as retas. Patrizi não chega a negar completamente o processo de abstração como forma legítima de compreender os objetos da matemática, tampouco diz que não se poderia usar a imaginação para acompanhar uma demonstração geométrica. O que ele diz, de maneira muito enfática, é que o "lugar" das magnitudes nem está nos corpos, nem está na mente, quer seja por abstração ou por uso da imaginação[501]. Nesse sentido, Patrizi se afasta não só de Aristóteles — o principal nome desse abstracionismo aqui criticado —, como também de Proclus. Diz ele:

> Todas essas coisas, entretanto, são imaginadas por nós como finitas. E nossa mente seleciona aqueles espaços finitos que podem ser acomodados aos espaços dos corpos mundanos. A mente não separa esses espaços dos corpos por abstração, como alguns afirmam, uma vez que esses espaços não estão primariamente e por si nos corpos mundanos, mas são anteriores aos corpos e são atualizados no espaço primário. Tampouco essas dimensões e o resto formado a partir delas têm sua subsistência na nossa *phantasia* ou *dianoia* (como alguns homens admiráveis afirmaram), tal como se por essas fossem subsumidas [*veluti in subiecto*][502].

A hesitação de autores como Finé, Clávio e Richard em admitir a infinitude das retas euclidianas pode ser atribuída a uma dependência da ontologia aristotélica. Ora, se a matemática é a ciência das magnitudes contínuas — abstraídas dos corpos, frise-se —, mas não há magnitude infinita, segue-se que a prolongação do Postulado 2 ou é sempre finita (i.e., um segmento retilíneo) ou é potencialmente infinita. Daí a permanência do Postulado 2 nas edições dos *Elementos*, mesmo quando sua função era diminuída com a introdução de novos axiomas de intersecção. Ao introduzir a infinitude nas matemáticas através do espaço, Patrizi possibilitou uma nova abordagem não-construtiva ao problema do Postulado 2[503]. Nos ocuparemos desse aspecto na próxima seção.

---

500 Etenim sicuti, quæ inter duo puncta spacii pars intercipitur, linea eft, & quæ inter tria, prima est superficies triangulus, sic quæ inter purta quatuor spacii pars continetur, (uno in eodem posito) primum corpus efficitur [scilicet] Pyramis. Post quod si quinque punctis spacium comprendatur, si sex, si aliis pluribus, non aliud quam corpus absoluent. Hoc est trinam dimenfionem, [scilicet] longum, latum, & profundum. Quibus partes spacii infiniti (nam totum ut infinitum non metinur) dimetimur (66c,d).

501 Sobre os argumentos de Aristóteles contra essa forma de platonismo, ver *Metafísica,* K 2, 1060b11-19.

502 Hæc tamen cuncta a nobis finita imaginari. Mentemque nostram finita sibi in opus sumere, quæ spaciis mundanorum corporum possint accommodari. A quibus corporibus non per abstractionem, mens ea separat, ut quidam contenderunt. Quoniam ea spacia non sunt primo, et per se in mundanis corporibus. Sed sunt ante corpora, actu in primo spacio. Neque etiam in phantasia, aut dianoea [sic.] nostra (ut quidam alii uiri admirabiles tradiderunt) veluti in subiecto, dimensiones illæ & quæ inde formantur reliqua, subsistentiam habent 68a-b).

503 Vide De Risi, Francesco Patrizi and the new geometry of space. In: Koen Vermeir & Jonathan Regier, *Boundaries, Extents and Circulations: Space and Spatiality in Early Modern Natural Philosophy,* Suíça, 2016b, p. 87.

7.6. Uma nova geometria

Assim como os *Elementos*, *Della nuova geometria* começa com três listas de gêneros de princípios científicos. A primeira lista contém 5 suposições. Mas, ao contrário de Euclides, estes princípios de Patrizi não são matemáticos. O leitor encontra ali algumas proposições de natureza metodológicas sobre o objeto da geometria. Tome-se como exemplo as duas primeiras suposições:

I. *As ciências matemáticas não são abstraídas das coisas naturais; e não estão na imaginação* [φαντασία] *ou no intelecto* [διάνοια]*; o espaço é seu objeto;*

II. *A geometria considera o ponto, a linha, o ângulo, a superfície e o corpo, sendo esta sua ordem natural*.

Em seguida, um grupo de 8 definições, todas elas relacionadas com o espaço e suas propriedades essenciais. As definições I-III tratam dos conceitos de *espaço mínimo*, *máximo* e *médio*, respectivamente; as definições IV-VIII tratam dos objetos já conhecidos dos *Elementos*: ponto, linha, ângulo, superfície e corpo. Desta vez, porém, estes objetos são modos do espaço. O ponto, por exemplo, não é mais aquilo de que nada é parte, mas sim o mínimo no espaço; a linha, por sua vez, é espaço longo, mas sem espessura. Por fim, Patrizi apresenta um grupo de 6 axiomas. Interessante notar que os axiomas de Patrizi tratam apenas das relações mereológicas. Por exemplo: que o todo é composto por partes; que o todo é maior do que suas respectivas partes; que a parte é menor do que o todo. Estes axiomas, vale notar, já figuravam em edições anteriores dos *Elementos.*

A primeira consequência da metafísica do espaço de Patrizi é a ausência da linguagem imperativa que caracteriza as construções nos *Elementos*. Esclarecemos no Capítulo 2 como Proclus associou essa linguagem a comandos e, posteriormente, ao conceito de imaginação (*phantasia*). Clávio, Borelli e Barrow seguem o mesmo caminho. Mas essa exigência deixa de existir na metafísica do espaço proposta por Patrizi. A razão para isso é que, com Patrizi, o espaço passa a ser definido como uma extensão imaterial (incorpórea portanto), de três dimensões, infinita e que precederia todos os seres criados. Ou seja, o espaço passa a ser doravante o primeiro princípio da natureza, a própria condição de existência de todas as coisas. Logo, se a geometria é a ciência do espaço e este antecede todos os entes, segue-se que os objetos da geometria existem independente do ato criativo do geômetra. Portanto, dizer que uma reta é traçada seria, na melhor das hipóteses, um mero recurso estilístico ou, na pior, uma maneira de ocultar a verdadeira forma lógica da proposição que apenas atesta a existência das retas. Em outras palavras, a metafísica do espaço de Patrizi oferece uma base teórica para uma abordagem não-construtiva aos *Elementos* de Euclides.

Uma segunda consequência a se observar no tratado de Patrizi é a estrutura de suas demonstrações. Uma vez que o seu método argumentativo não é construtivo, é natural que desapareça a divisão proposta por Proclus, qual seja: enunciado, exibição, determinação, construção, demonstração linguística e conclusão. Mas Patrizi dá um passo a mais ao expor suas provas de maneira puramente linguística. Todavia, essa nova concepção de prova não parece se seguir dalgum entendimento de que o recurso ao diagrama era ilegítimo; os indícios até aqui considerados permitem-nos conjecturar que a dispensabilidade dos diagramas se seguiu ao novo entendimento do espaço.

Observa-se, finalmente, uma nova concepção das retas euclidianas. Como já foi dito, os comentadores de Euclides no século XVI ainda não estavam de acordo sobre a natureza destes objetos — se as retas eram finitas, infinitas em ato ou em potência. Por seu turno, Patrizi deduz a infinitude das retas a partir da infinitude do espaço. Mas, a infinitude, ao contrário de Aristóteles, vale para Patrizi apenas para a prolongação e não para a divisão. Ou seja, para Patrizi, as retas são infinitas e são compostas por pontos indivisíveis. Com efeito, no Livro II de *Della nuova geometria* Patrizi apresenta uma série de demonstrações segundo as quais 1) a linha mínima não é infinitamente divisível, o mesmo valendo para 2) a linha média, 3) a linha máxima. Ainda assim, Patrizi não defende aqui que as linhas são infinitas em ato, como o próprio espaço seria. Em vez disso, ele demonstra, no Livro III, que as linhas podem ser prolongadas (Teorema XXIII), que podem ser prolongadas sempre (Teorema XIV) e que podem ser prolongadas ao infinito (Teorema XXV). Note-se, a propósito, que o Teorema XXIII é o equivalente ao Postulado 2 de Euclides.

A relação de Patrizi na reforma axiomática do século XVI é observada também em sua tentativa de reformular os Postulados de Euclides, acrescentando, no primeiro, a noção de existência e, no segundo, a de infinitude. Patrizi propõe na proposição 11 do Livro III uma demonstra da existência das linhas retas a partir de dois pontos dados no espaço. A admissão das linhas infinitas em ato, porém, se atesta alhures: "Negamos, portanto, que a linha da nossa mente ou a da arte podem se produzir ao infinito: admitimos, porém, que não obstante esta seja finita em função dos pontos, a infinitude (*infinitudinem*) de sua natureza é liberada por estes, como expomos"[504]. Embora Patrizi não tenha ultrapassado os resultados mais conhecidos de Euclides, seu esforço em fundamentar a geometria no espaço serve-nos como uma referência inicial sobre a maneira como o método construtivo foi transformado na

[504] Patrizi, *Noua de universis philosophia*, 1591, f. 66v.

Modernidade. Mais ainda, apesar de Patrizi não ter sido um matemático tão criativo e prolífico quanto Clávio e Borelli, sua influência cresceu ao longo do século XVII e alcançaram Pierre Gassendi, Thomas Hobbes, Isaac Barrow, Isaac Newton e G. W. Leibniz.

7.7. O declínio da retórica matemática

Dentre os autores que apresentaram novos sistemas axiomáticos para a geometria euclidiana no século XVI, Francesco Patrizi foi aquele que mais se distanciou da tradição aristotélica ao definir a geometria como a ciência do espaço puro. A partir de tal definição ele concluiu, em antecipação a Biancani e Descartes, que a imaginação (*phantasia*) era dispensável das demonstrações matemáticas, o mesmo se aplicando aos diagramas. Isso é evidenciado tanto no modo de apresentação dessas demonstrações, que já não correspondem à divisão verificada em matemáticos da Escola de Alexandria, quanto na ausência de uma linguagem imperativa e, por conseguinte, de postulados de construção.

Como esclarecemos nos capítulos 5 e 6, alguns autores recorreram à retórica para explicar certos aspectos da prática matemática de Euclides, a exemplo de Petrus Ramus, Peletier, Biancani e Barrow. Essa foi a maneira encontrada para explicar as supostas incompatibilidade entre o método demonstrativo euclidiano e a silogística. Patrizi também destoa de seus contemporâneos nesse aspecto. Ao invés de fazer concessões à arte retórica, como era a praxe no Renascimento, ele começou a carreira acadêmica uma crítica veemente a essa disciplina no livro *Della retorica*, de 1562.

Della retorica, em suma, é uma imitação do *Górgias* de Platão. A tese principal de Patrizi, portanto, é mostrar que a retórica não é uma ciência, tampouco uma arte. No primeiro diálogo, mantido entre os personagens Michiele Lamberti, Giulio Strozzi, da poderosa Família Strozzi, e o próprio Patrizi, a retórica é reduzida a uma função meramente laudatória. Por causa dessa função laudatória, há uma dependência intrínseca da retórica em relação às línguas humanas, as quais são enganosas. Portanto, a retórica é também uma disciplina do engodo e da trapaça.

Patrizi imita Platão também no apelo que faz aos mitos. Por exemplo, ele utiliza um mito de criação, supostamente de origem etíope e que fora passado a Baldassare Castiglione, para a ilustrar a maneira como a audácia daqueles que eram mais talentosos e engenhosos em prejudicar os outros, que crescia ao mesmo tempo em que o medo diminuiu nos menos corajosos, levou a uma parceria duradoura sob incentivo do medo, a qual resultou na criação dos conceitos de paz e justiça. Construíram templos e altares, continua a narração de Patrizi, como se fossem deuses, dando-lhes honras divinas, sacrifícios e sacerdotes[505]. Eis, portanto, a origem social da retórica: quando os medrosos se uniram para encontrar proteção contra os mais poderosos, ou quando são chamados a julgamento, aparece o orador (*favellatore*)[506].

A retórica, portanto, não poderia produzir conhecimento, mas apenas opinião. Nesse particular, Patrizi compara persuasão e demonstração sem considerar com a devida atenção a doutrina aristotélica dos entimemas. A qualidade dos argumentos, na verdade, não teria relação alguma com a arte retórica, mas dependeria apenas da "lógica subjacente", a saber, a silogística[507]. No Sétimo Diálogo, mantido entre Florio Maresio e Patrizi, o autor estabelece uma relação entre retórica e governo popular. Para justificar tal associação são mencionados os nomes de Cícero e Longino, para os quais os oradores seriam respeitados pelo povo em tempos de paz e tranquilidade[508]. Os oradores teriam aparecido na Península Italiana, ainda segundo outro relato de Cícero depois da deposição dos tiranos da Sicília e a consequente necessidade de reparação jurídica daqueles prejudicados pelos antigos governantes[509]. O orador só conseguiria prosperar em tais circunstâncias, diz Patrizi, porque submete seu ofício ao engano para acumular ganhos pessoais[510].

Depreende-se dos capítulos 5 e 6 desta Tese que a visão pessimista de Patrizi a respeito da retórica era minoritária dentro do grupo de estudiosos e divulgadores da matemática nos séculos XVI e XVII. Por um breve momento a retórica foi vista como um

---

505 Francesco Patrizi *Della retorica*, 1562, f. 7v: Et da quefta fperanza rinforzandofiil timor primiero & questo introducendo con effo feco il fuo contrario la ficurta l audacia fi cominciò con gli inganni con le ingiurie & con la forza a preue nirle aprocacciarfi di fuggire con la ruina altrui la propria Et quindi fi mifero le cofe tutte in confufo occupando ciascuno l altrui rubando ingannando & uccidendo & adoprando l ingegno per miniftro dell audacia & delle scelera tezze inuentando al continuo di nuoue arti et nuoue machinationi per opprime re il compagno Et da quefto crefcendo fempre piu l audacia in quegli che piu are diti & piu ingegniofi a danni altrui erano & ne i meno crefcendo la paura fi riftrinfero in uno i paurofi et aguzzando loro l ingegno la temenza configlia tifi infieme inuentarono il nome della pace et della giuftitia & tanto fecero pre alendo tutti infieme alla forza de pochi audaci che l introduffero nelle compa gnie loro nelle città Et edificarono loro tempiï et altari quafi fossero Dei sta tuendo loro honori diuini et facrifici et facerdoti Tefferono appresso molte et lunghe catene di parole con le quali legando la giustitia et la pace per gli piedi per le braccia et pel trauerfo et per lo collo in mille guise annodandole andarono accioche elle delle loro città non dipartissero raccommandando icapi delle cate ne che eßi addimandarono leggi in mano ad huomini del loro animo et paurofi I quali nominarono giudici et magistrati.

506 Patrizi, *Della retorica,* 1562, f. 8r: Et allhora, che i paurosi si ristrinsero insieme, per ritrouar riparo contra i piu potenti, nacque il fauellatore di consiglio. Et quando li chiamarono in giudicio, nacque il fauellatore di giudicio. Esse mito se assemelha à teoria epicurista do pacto social descrita por Diógenes Laércio no Livro X.

507 Ver Patrizi, *Della retorica,* 1562, f 12r-13v, 32r-34v.

508 Patrizi *Della retorica,* 1562, f. 38r. Cosi, che disse Cicerone, che questo oratorio mestiere, in tutti i liberi popoli et maßimamente nelle citta quiete, et tranquille, fiori sempre & su signore. Et poi anche mi pare, che Longino dicesse lo Oratore sempre essere stato, appo il popolo di grande stima & di alto pregio. Para a passagem de Cícero, ver *De oratore*, I.viii.30; para Longino, ver *De sublime*, XLIV.1-3.

509 *ibd*. Ver Cícero, Brutus, XI.46.

510 *Id.,* f. 39r-40v.

método científico alternativo ao aristotélico. Agricola e Melanchthon, ao que parece, consideravam a nova dialética (i.e., retórica e dialética) útil para a matemática. Cifoletti, em especial, mostrou como esse novo entendimento da retórica foi fortalecido pelo desenvolvimento da álgebra, a arte oculta dos números, que passou a ser vista como uma arte digna de interesse teórico, passando a constar nos currículos de centros educacionais (sobretudo em países reformados).

Um episódio igualmente digno de nota foi o debate sobre o uso das línguas nacionais para a redação de textos científicos em detrimento do latim. Esse é o debate que subjaz algumas passagens do *Discurso* do método de Descartes. Esse tópico é fundamental em Peletier.

Todavia, os comentadores de Euclides, mesmo quando usavam categorias da retórica clássica, não desenvolveram uma sistematização dos entimemas. Clávio, por exemplo, ao responder a Piccolomini, notou que a brevidade argumentativa não só era preferível a longas sequências silogísticas, como também não afetam a correção das demonstrações. Esse é o cerne dos entimemas, como bem observaram, tempos depois, Biancani e Barrow. Ora, os dados bibliográficos do século XVI mostram que a retórica de Aristóteles era tão lida quanto os textos de Cícero e Quintiliano. Não se poderia dizer, portanto, que a abordagem, por assim dizer, racional, à retórica era completamente ausente.

Nos manuais de Boécio e Pedro Hispânico os entimemas ganham pouca atenção, e sequer são considerados fora do escopo da retórica. Pedro Hispânico define o entimema como um silogismo imperfeito (*Entimema est sillogismus imperfectus*) no qual não é preciso colocar uma das premissas. A única relação estabelecida entre raciocínios demonstrativos e entimemas reside na possibilidade de todo entimema poder ser reduzido aos silogismos (*omne entimema debet reduci ad sillogismum*)[511].

7.8. Observações finais

A discussão a respeito da inclusão de novos axiomas de intersecção, que desempenham um papel significativo na base da matemática contemporânea, visando reduzir a dependência dos diagramas, não resultou numa concepção homogênea de demonstração em Oronce Finé e Claude Richard, que ocasionalmente empregavam axiomas de intersecção em

[511] Boécio, *In Topica Ciceronis*, 1143B-1143D. Pedro Hispânico, *Summaries of Logic [Summulae Logicales]*, Oxford, 2014, p. 198. Tradução, introdução e notas de Brian P. Copenhaver, Calvin Normore & Terence Parsons.

suas proposições, porém de maneira não sistemática. As inferências por meio de diagramas, incluindo as relacionadas à intersecção, ainda eram comuns em suas edições dos *Elementos*. Além disso, para esses autores, seguindo a filosofia aristotélica, a continuidade era considerada uma característica das magnitudes finitas, o que justifica a manutenção do Postulado 2.

No âmbito das axiomatizações da geometria euclidiana, a nova geometria de Francesco Patrizi introduz uma série de inovações filosóficas. A primeira delas, e também a mais importante, é a mudança do objeto dessa disciplina: em vez do conceito de magnitude contínua, presente em praticamente todos os comentadores de Euclides desde Proclus, Patrizi define a geometria como a ciência do espaço puro. Em segundo lugar, Patrizi rejeita por completo o conceito de *phantasia* matemática, tema esse herdado de Proclus e usado por Peletier e Clávio para explicar a alusão ao movimento nas definições, bem como nos teoremas I.4, I.8 e III.24. Isso se reflete na prática matemática de duas maneiras. Em primeiro lugar, são dispensados os postulados de construção, uma vez que o objeto da geometria é dado previamente, cabendo ao geômetra apenas demonstrar. Daí o fato da geometria patriziana não contemplar uma dicotomia entre linguagem operativa (ou normativa) e uma linguagem descritiva (ou teórica). Em segundo lugar, não há qualquer referência ao diagrama.

8. Conclusão

Essa Tese apresentou o debate acerca da natureza das demonstrações geométricas euclidianas nos séculos XVI e XVII a partir da recepção dos textos de Aristóteles e Proclus. O comentário de Proclus fornece um relato cronológico da matemática grega na qual Euclides aparece como herdeiro direto de Platão. Sua principal contribuição é ter apresentado as discussões sobre os critérios de admissibilidade de princípios matemáticos. Mais ainda: traz à tona os dissensos relativamente à natureza dos primeiros princípios, a começar pelo fato do comentador sugerir a necessidade de verbalizar proposições que Euclides teria assumido tacitamente. Ainda a esse respeito, Proclus considerava que somente definições e axiomas eram indemonstráveis; os postulados, segundo ele, em uma leitura de Aristóteles, poderiam ser reduzidos às definições. Proclus também esteve no centro da polêmica a respeito da cientificidade das matemáticas (*quaestio de certitudine mathematicarum*). Diante desse desafio, que se somava às críticas já existentes à silogística, alguns comentadores de Euclides passaram a considerar as suas demonstrações como entimemáticas, o que evitaria concluir que não há conhecimento demonstrativo nas matemáticas.

A dispensabilidade dos diagramas está associada ao sistemático processo de simbolização da lógica entre meados do século XIX e início do XX. Relativamente às demonstrações matemáticas, o principal argumento em prol do simbolismo — na maioria das vezes inspirado na *lingua characteristica* de Leibniz — era a perspicuidade: explicitar a forma lógica dos argumentos com mais precisão que as línguas ordinárias. No limite, poder-se-ia também tornar todo o processo dedutivo mecânico, evitando com isso a dependência de processos psicológicos. Para alcançar tal objetivo, seria preciso eliminar as lacunas lógicas, i.e., eliminar quaisquer inferências extralinguísticas, como diagramas, intuição e imaginação. Daí a necessidade de uma fundamentação das relações anteriormente consideradas óbvias, o que só poderia ser feito através da lógica. Disso resultou a definição *standard* de prova, a saber, uma sequência de fórmulas, tal que cada uma delas ou é um axioma ou se segue da aplicação prévia de uma regra de inferência válida.

A ligação entre matemática e lógica também era uma reivindicação explícita entre os comentadores peripatéticos mais antigos, como Alexandre de Afrodísias, o qual já comparava Euclides e Aristóteles. Nos Capítulos 2 e 3 estabelecemos um paralelo entre a análise do conhecimento matemático que pode ser extraída dos *Analíticos* de Aristóteles e a versão contemporânea de análise lógica que decorre do sistema axiomático-formal de Hilbert. O comentário de Proclus ao Livro I dos *Elementos* serviu de fio condutor. Apesar dele declarar que Euclides não era mais do que um sistematizador da *paidéia* platônica, ele aplica ao método inferencial euclidiano o ponto de vista da ciência demonstrativa exposta nos *Analíticos* de Aristóteles.

Apresentamos no Capítulo 2 as principais características das demonstrações euclidianas. Viu-se que as afirmações feitas nessas demonstrações estão baseadas nalgum dos princípios previamente anunciados — definições, postulados e noções comuns — ou no diagrama. Relativamente ao método inferencial euclidiano, a interpretação dominante, exemplificada por Proclus, é considerar que a função dos enunciados-problemas é mostrar a existência de certos objetos matemáticos; que os teoremas precedem epistemicamente os problemas; que o núcleo das demonstrações é a dedução. A primeira seção contextualizou os princípios euclidianos dentro das tradições filosóficas de Platão e Aristóteles. Argumentamos que a abordagem construtiva dos *Elementos* é crucial para se compreender as diferenças de Euclides em relação àqueles filósofos. Exemplificamos na segunda seção como Euclides procede em seus argumentos, com especial referência ao uso dos diagramas para justificar construções geométricas. Para isso, consideramos o estudo de Manders sobre a prática matemática euclidiana. Ao contrário das objeções de intérpretes contemporâneos, Euclides usa os diagramas de maneira controlada, nunca permitindo que atributos exatos sejam indevidamente inferidos a partir da parte visual. Defendeu-se que as construções geométricas desempenhavam um papel muito importante na resolução de problemas, os quais eram tão relevantes quanto a demonstração de teoremas.

Nos *Analíticos posteriores,* Aristóteles afirma que o conhecimento científico parte de primeiros princípios e procede dedutivamente através de silogismos científicos. Viu-se que Aristóteles seguidamente usa as matemáticas como exemplo de conhecimento científico e que os *Elementos*, no que toca aos primeiros princípios, satisfaz algumas das condições estabelecidas. Não rejeitamos, por isso, a possibilidade da terminologia euclidiana ter sofrido algum tipo de interferência de copistas, i.e., que as expressões “hipóteses” e “axiomas” tenham sido usadas nas primeiras versões dos *Elementos*, embora a escassez documental não nos permita ir além dessas especulações. No caso dos postulados e hipóteses, para além da possível interpolação, os Postulados 4 e 5 claramente são princípios próprios no sentido aristotélico, ao passo que para os Postulados 1-3 Euclides, que não têm formulações correspondentes em Aristóteles, permite estabelecer uma identificação entre suposição de existência e construção.

O Capítulo 3 apresentou um estudo do método axiomático-formal de David Hilbert tal como apresentado nos *Fundamentos da geometria*. Mostrou-se, em primeiro lugar, que o propósito de Hilbert não era uma reconstrução da prática matemática euclidiana, senão uma reconstrução *da* geometria euclidiana, entendida como um conjunto de teoremas. Essa perspectiva, apesar de matematicamente importante, não responde às questões epistemológicas em torno das demonstrações heterogêneas de Euclides.

No Capítulo 4, examinamos a proposta de A. Lassalle Casanave & Panza relacionada à maneira como Euclides emprega o Postulado 2, a partir do aspecto retórico presente nesse processo. Segundo esses autores, pode-se interpretar a prática matemática engendrada pelos *Elementos* a partir dos conceitos de entimema e audiência. Recentemente, muitos estudiosos têm sublinhado a importância de reavaliar as demonstrações matemáticas dentro do contexto das práticas argumentativas em que são utilizadas. Em vez de aderir rigidamente à concepção ideal de demonstração do modelo clássico, sugere-se considerar também as demonstrações reais. Essa nova perspectiva não tem a intenção de diminuir a importância da análise lógica. Todavia, deve-se reconhecer a vantagem da a análise retórica em comparação com a doutrina aristotélica da ciência demonstrativa, mencionada no Capítulo 2, e o método axiomático-formal de Hilbert, discutido no Capítulo 3, por oferecer um tipo de reconstrução no âmbito da qual pode-se ter uma prática matemática baseada em argumentos heterogêneos.

Conforme demonstrado no Capítulo 5, desde o século XIV, a silogística vinha enfrentando críticas cada vez mais contundentes, fato que explica, em parte, o interesse de comentaristas da obra euclidiana em adotar uma abordagem retórica às matemáticas. Alessandro Piccolomini, por outra parte, ao tentar justificar a supremacia da lógica na filosofia natural, acabou fortalecendo essas críticas, pois, de acordo com seu argumento, nem mesmo a geometria conseguia satisfazer os requisitos dos *Analíticos Posteriores*. Nesse contexto, vários intelectuais influenciados pelo pensamento aristotélico se esforçaram para reconciliar a teoria da demonstração aristotélica com as demonstrações matemáticas, particularmente aquelas encontradas nos *Elementos*. Foi também nesse período que surgiram as versões mais importantes do texto euclidiano, como a de Federico Comandino em 1572 e a de Cristóvão Clávio em 1574. O envolvimento de Cristóvão Clávio nesse debate, além das motivações pedagógicas do padre jesuíta que foram destacadas para explicar as alterações feitas no texto de Euclides, reflete uma preocupação com o papel das matemáticas na explicação dos fenômenos naturais. Clávio reconhecia a necessidade de adaptar a geometria às inovações que a filosofia natural estava começando a experimentar.

O desafio lançado por Piccolomini sobre o caráter científico das matemáticas foi respondido por Cristóvão Clávio e Biancani. No entanto, embora ambos estivessem alinhados com o modelo clássico de ciência, concordavam que, em geral, os matemáticos não se esforçavam para detalhar a forma lógica de seus argumentos, preferindo ser concisos na maioria das circunstâncias. Foi em reação a esse desafio apresentado por Piccolomini que esses autores começaram a conceber as demonstrações euclidianas como entimemáticas. Importante ressaltar que, mesmo que esses autores não tenham expressado objeções aos diagramas, eles compartilhavam a perspectiva de que as demonstrações tinham um caráter discursivo.

No Capítulo 6, investigamos o método de sobreposição. Os axiomas de congruência e transposição de figuras, que são examinados detalhadamente aqui. O debate sobre a legitimidade matemática do método de sobreposição teve início com os comentaristas árabes de Euclides e persistiu até o século XX, com figuras notáveis como Bolzano e Russell, até encontrar uma solução com Hilbert. Segundo os registros disponíveis, Jacques Peletier foi o primeiro crítico do método de sobreposição na época moderna. Suas objeções se mantiveram dentro do contexto conceitual estabelecido pelo modelo clássico de ciência. Os principais oponentes de Peletier, incluindo Clávio, Biancani, Saville e Barrow, compartilhavam dessa perspectiva. No entanto, ao contrário das soluções posteriormente buscadas na geometria contemporânea, ambos os lados reconheciam que a prática matemática euclidiana demandava considerações sobre o papel da imaginação (phantasia) e dos entimemas.

Ainda no âmbito das axiomatizações da geometria euclidiana, ou, mais precisamente, o que se entendia como geometria euclidiana no século XVI, no Capítulo 7 o foco recai, em primeiro lugar, sobre a discussão a respeito da inclusão de novos axiomas relacionados à intersecção. É notável que, embora os axiomas desse tipo desempenhem um papel significativo na base da matemática contemporânea, visando reduzir a dependência dos diagramas, esta preocupação não predominava no século XVI. Autores como Oronce Finé e Claude Richard ocasionalmente empregavam axiomas de intersecção em suas proposições, porém de maneira não sistemática. As inferências por meio de diagramas, incluindo as relacionadas à intersecção, ainda eram comuns em suas edições dos *Elementos*. A esse respeito, a mudança mais revolucionária ocorre com Patrizi, que introduz o conceito de espaço infinito na geometria euclidiana.

Dentre as axiomatizações da geometria euclidiana, as transformações filosóficas propostas por Patrizi mereceram um destaque à parte. Primeiramente, ele reformulou a geometria, passando a defini-la como a disciplina dedicada à compreensão do espaço puro. Em segundo lugar, Patrizi rejeitou completamente o conceito de phantasia matemática, que tinha sido legado por Proclus e que Peletier e Clávio utilizaram para explicar as alusões ao movimento presentes nas definições e teoremas. Além disso, Patrizi eliminou os postulados de construção, uma vez que ele considerava o objeto da geometria, i.e., o espaço puro, como algo dado a priori. A geometria proposta por Patrizi não faz distinção entre uma linguagem operativa (ou normativa) e uma linguagem descritiva (ou teórica). Além disso, os diagramas não eram mais mencionados. Por fim, é possível perceber como essa nova perspectiva a respeito da geometria estava intrinsecamente ligada às críticas de Patrizi à retórica e como ele procurava desassociar a geometria de elementos retóricos.

Bibliografia

I. Edições e traduções dos *Elementos* até o século XVII

BUSARD, H. L. L. (Ed.). *The First Latin Translation of Euclid's Elements commonly ascribed to Adelard of Bath. Books I-VIII and Books X.36-XV.2*. Toronto: Pontifical Institute of Mediaeval Studies, 1983.
BUSARD, H. L.L., & FOLKERTS, M. (ed.) *Robert of Chester's Redaction of Euclid's Elements, the so-called Adelard II Version*. 2 Vols. Berlin: Birkhäuser, 1992.
BUSARD, H. L. L. (Ed.). *Johannes de Tinemue's redaction of Euclid's Elements, the so-called Adelard III version.* 2 Vols. Stuttgart: Franz Steiner Verlag, 2001.
CAMPANO DA NOVARA, *Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi, in artem geometrie incipit quamfoelicissime*, Venezia, Ratdolt, 1482.
GIORGIO VALLA, *De expetendis et fugiendis rerum opus*, Venezia, Manuzio, 1501.
BARTOLOMEO ZAMBERTI, *Euclidis megarensis philosophi platonici Mathematicarum disciplinarum Janitoris: Habent in hoc volumine quicumque ad mathematicam substantiam aspirant: elementorum libros XIII. cum expositione Theonis, Venezia,* Tacuino, 1505.
LUCA PACIOLI, *Euclidis megarensis philosophi acutissimi mathematicorumque omnium sine controversia principis opera a Campano interprete fidissimo translata*, Venezia, Paganino, 1509.
JACQUES LEFÈVRE D'ÉTAPLES, *Euclidis Megarensis Geometricorum elementorum libri XV. Campani Galli transalpini in eosdem commentariorum libri XV. Theonis Alexandrini Bartholomaeo Zamberto Veneto interprete, in tredecim priores, commentariorum libri XIII*, Paris, Henri Estienne, 1516.
JOHANNES VÖGELIN, *Elementale geometricum ex Euclidis geometria*,Wien, Singren, 1528.
SIMON GRYNAEUS, *Εὐκλείδου Στοικείων*, Basel, Herwagen, 1533.
ORONCE FINE, *In sex priores libros geometricorum elementorum Euclidis Megarensis demonstrationes*, Paris, Simon de Colines, 1536.
NICCOLÒ TARTAGLIA, *Euclide Megarense philosopho, solo introduttore delle scientie mathematice*, Venezia, Rossinelli, 1543.
PETRUS RAMUS [PIERRE DE LA RAMÉE], *Euclides*, Paris, Grandin, 1545.
ANGELO CAIANI, *I quindici libri degli Elementi di Euclide, di greco tradotti in lingua thoscana*, Roma, Blado, 1545.
JOACHIM CAMERARIUS, *Euclidis elementorum geometricorum libri sex, conversi in Latinum sermonem*, Leipzig, Valentin, 1549.
JOHANN SCHEYBL, *Euclidis Megarensis philosophi et mathematici excellentissimi, Sex libri priores de geometricis principijs,* Basel, Herwagen, 1550.
ROBERT RECORDE, *The Pathway to Knowledg, containing the First Principles of Geometrie*, London, Wolfe, 1551.

VALENTIN NABOTH, *Euclidis Megarensis mathematici clarissimi elementorum geometricorum*
liber primus, Köln, Birkmann, 1556.
JACQUES PELETIER DU MANS, *In Euclidis Elementa Geometrica Demonstrationum Libri sex*, Lyon, Tornes, 1557.
[JEAN MAGNIEN, PIERRE DE MONTDORÉ, ST. GRACILIS], *Euclidis Elementorum libri XV, Graecè et Latinè*, Paris, Cavellat, 1557.
CONRAD DASYPODIUS, *Euclidis quindecim Elementorum Geometriae primum*, Strasbourg, Mylius, 1564.
PIERRE FORCADEL, *Les six premier livres des Elements d'Euclide traduicts et commentez par Pierre Forcadel de Bezies*, Paris, Marnef, 1564.
CHRISTIAN HERLIN & CONRAD DASYPODIUS, *Analyseis geometricae sex librorum Euclidis*, Strasbourg, Rihel, 1566.
FRANÇOIS DE FOIX-CANDALE, *Euclidis Megarensis mathematici clarissimi elementa geometrica libri XV ad germanam geometriae intelligentiam è diversis lapsibus temporis iniuria contractis restituta*, Paris, Royer, 1566.
FRANCESCO MAUROLICO, *Euclidis elementorum compendia*, 1567.
PEDRO JUAN DE LASTANOSA (DE MONZÓN), *Elementa Arithmeticae ac Geometriae*, Valencia, Huete, 1569.
HENRY BILLINGSLEY, *The elements of geometrie of the most ancient Philosopher Euclide of Megara, faithfully (now first) translated into the English tongue*, London, Daye, 1570. Introdução de John Dee.
FEDERICO COMMANDINO, *Euclidis elementorum libri XV una cum Scholiis antiquis*, Pesaro, Franceschini, 1572.
CHRISTOPH Clávio, *Euclidis elementorum libri XV*, Roma,Vincenzo Accolto, 1574.
FEDERICO COMMANDINO, *De gli elementi d'Euclide libri quindici con gli scolii antichi*, Urbino, Frisolino, 1575.
RODRIGO ZAMORANO, *Los seis libros primeros dela geometria de Euclides,* Sevilla, La Barrera, 1576.
CHRISTOPH Clávio, *Euclidis elementorum libri XV,* Roma, Bartolomeo Grassio, 1589.
NASIR AD-DIN AT-TUSI, *Euclidis elementorum geometricorum libri tredecim ex traditione doctissimi Nasiridini Tusini*, Roma, Typographia Medicea, 1594.
PIETRO ANTONIO CATALDI, *I primi sei libri de gl'Elementi d'Euclide ridotti alla Prattica*, Bologna, Cochi, 1613.
DENIS HENRION, *Les quinze livres des elements d'Euclide traduicts de Latin en François*, Paris, Joallin, 1615.
CHRISTOPH GRIENBERGER, *Euclidis sex primi elementorum geometricorum libri cum parte undecimi ex majoribus Clavij commentarijs in commodiorem forma contracti*, Graz, Widmanstad, 1636.
CLAUDE RICHARD, *Euclidis elementorum geometricorum libros tredecim*, Antwerp, Verdus, 1645.
JOHN WALLIS, *In Elementa Euclidis Praelectiones*, 1651 (Não publicado).
GIOVANNI RICCI, *De gli Elementi di Euclide li primi sei Libri*, Bologna, Longhi, 1651.

ANDREAS TACQUET, *Elementa geometriae planae et solidae,* Antwerp, Meurs, 1654.
ISAAC BARROW, *Euclidis Elementorum Libri XV breviter demonstrati*, Cambridge, Nealand, 1655.
BLAISE PASCAL, *Introduction à la géométrie*, [ca. 1655] (Não publicado).
GIOVANNI ALFONSO BORELLI, *Euclides restitutus, sive prisca geometriae elementa*, Pisa, F. Onofrio, 1658; Roma, Mascardi, 1679.
_____. *Euclide rinnovato ovvero gli antichi elementi della geometria*, Bologna, Ferroni, 1663.
CLAUDE FRANÇOIS MILLIET DECHALES, *Huict Livres des Elements d'Euclide rendus plus faciles*, Lyon, Coral, 1672.
ANTOINE ARNAULD, *Nouveaux Élémens de géométrie*, Paris, Savreux, 1667.
GILLES-FRANÇOIS DE GOTTIGNIES, *Elementa geometriae planae*, Roma, AngeloBernabò, 1669.
VINCENZO VIVIANI, *Quinto Libro degli Elementi di Euclide, ovvero Scienza Universale delle Proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo*, Firenze, Condotta, 1674.
GILLES PERSONNE DE ROBERVAL, *Éléments de géométrie*, [ca. 1673–1675] (Não publicado).
JEAN PRESTET, *Elemens des mathematiques, ou principes generaux de toutes les sciences qui ont les grandeurs pour objet*, Paris, Pralard, 1675.
MERCATOR (NIKOLAUS KAUFFMANN), *Euclidis Elementa Geometrica Novo Ordine ac Methodo fere demonstrata*, London, Martyn, 1678.
VITALE GIORDANO DA BITONTO, *Euclide Restituto, ovvero gli antichi elementi geometrici ristaurati e facilitati*, Roma, Angelo Bernabò, 1680.
JACQUES ROHAULT, *Les six premiers Livres des Elemens d'Euclide, in Ouvres posthumes*, ed. C. Clerselier, Paris, Desprez, 1682.
ANTOINE ARNAULD, *Nouveaux Élémens de géométrie*, Paris, Desprez, 1683.
BERNARD LAMY, *Les elemens de geometrie*, Paris, Pralard, 1685.
JEAN PRESTET, *Nouveaux elemens des mathematiques, ou principes generaux de toutes les sciences qui ont les grandeurs pour objet*, Paris, Pralard, 1689.
JOHAN LUDVIG HEIBERG. *Opera Omnia*. Lipsiae: B.G. Teubneri, 1883.
THOMAS L. HEATH. *The Thirteen Books of the Elements*. Cambridge: Cambridge University Press, 1908.

II. Textos clássicos e literatura secundária

ACERBI, F. *The Logical Syntax of Greek Mathematics*. New York: Springer, 2021.
ALEXANDRE DE AFRODÍSIAS, *On Aristotle Prior Analytics 1.23-31*. Tradução: Ian Mueller. New York: Bloomsbury, 2006.
ANDERSEN, L. E. Acceptable gaps in mathematical proofs. *Synthese*, p. 1-15, 2018.
ANDERSEN *et al*. Mathematicians writing for mathematicians. *Synthese*, p. 1-18, 2019.
ANGLIN, W. S. Mathematics and Value. *Philosophia Mathematica* (2) 6(2), p. 145-173, 1991.
ANNAS, J. *An Introduction to Plato's Republic*. Oxford: Clarendon Press, 1981.
APOLÔNIO. *Apollonii Pergaei Conicorum libri IV*. Tradução: Claude Richard. Antwerp, 1655.

ARISTÓFANES. *Clouds. Wasps. Peace*. Edição e tradução de Jeffrey Henderson. Loeb Classical Library. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1998.
ARISTÓTELES. *Metaphysics*. Edição de David Ross. New York: Oxford University Press, 1924.
_____. *The Art of Rhetoric*. Edição e tradução de John Henry Freese. London: William Heinemann, 1926.
_____. *Prior and Posterior Analytics: A Revised Text with Introduction and Commentary*. Edição de David Ross. New York: Oxford University Press, [1949] 1957.
_____. *Posterior Analytics*. 2ª ed. Edição e tradução de Jonathan Barnes. Oxford: Oxford University Press, 1994.
_____. *Analíticos Segundos*. Tradução, introdução e notas: Miguel Candel Sanmartín. Madrid: Editorial Gredos, 1995.
_____. *Retórica*. Tradução: Manuel Alexandre Júnior. 2 ed. Lisboa: Imprensa Nacional-Casa da Moeda, 2005.
ARQUIMEDES. *Archimedis opera omnia.* Edição: Johan Ludvig Heiberg. 3 vols. Lipsiae: B. G. Teubneri, 1880-1.
_____. *The Works of Archimedes*. Tradução: Thomas L. Heath. New York: Cambridge University Press, 1897.
_____. *The Works of Archimedes*. 1 vol. Tradução: Reviel Netz. New York: Cambridge University Press, 2004.
ACERBI, F. *The Logical Syntax of Greek Mathematics*. Switzerland: Springer, 2021
AUJAC, G. Le langage formulaire dans la géométrie grecque. *Revue d'histoire des sciences*, p. 97-109, 1984.
AURISPA, G. *Carteggio di Giovanni Aurispa*. Editado por R. Sabbadini, Roma: Tipografia del Senato, 1931.
AVIGAD, J. 2019. "Reliability of mathematical inference". Inédito.
AVIGAD, *et al*. A Formal System for Euclid's *Elements*. *The Review for Symbolic Logic*, v. 2, p. 1–83, 2009.
AXWORTHY, A. *Motion and Genetic Definitions in the Sixteenth-Century Euclidean Tradition*. Suíça: Birkhäuser, 2021.
AYER, A. J. *Language, Truth and Logic*. 2 ed. London: Gollancz, [1936] 1946.
BARNES, J. Aristotle's theory of demonstration. In Jonathan Barnes, Malcolm Schofield & Richard Sorabji, Articles on Aristotle. I. Science, Duckworth.
BARROW, I. *Lectiones Mathematicae.* Londres: Wells, 1683.
_____. *The Theological Works of Isaac Barrow*. Editado por Alexander Napier. Vol. V. Oxford: Clarendon Press, 1859.
BARWISE, J. & ETCHEMENDY, J. Visual Information and Valid Reasoning. In: AllWein, G & Barwise, J., *Logical Reasoning with Diagrams*. New York: Oxford University Press, p. 3–23, 1996.
BEPPO LEVI. *Lendo Euclides.* Tradução de Julián Fuks. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2008.
BERNARDINO BALDI. *Le Vite De' Matematici [Cronica de Matematici]*. Edição de Elio Nenci, Milão: Franco Angeli, [ca. 1587/1589] 1998 .
BESSARION. *In calumniatorem Platonis* Venice: Aldus, 1516.
BIANCANI, G. *De Mathematicarum Natura Dissertatio*. Bononiae, 1615.

_____. *Sphaera mvndi, sev cosmographia demonstratiua , ac facile methodo tradita : in qua totius Mundi fabrica, vna cum nouis, Tychonis, Kepleri, Galilaei, aliorumq'*, Bolonha, 1620.
BLUM, P. R. Early Jesuit Philosophers on the Nature of Space. In: Cristiano Casalini (ed.), *Jesuit Philosophy on the Eve of Modernity*. Boston: Brill, p. 137-165, 2019.
BOÉCIO. *In Topica Ciceronis*. Edição, tradução, introdução e notas de Eleonore Stump. Ithaca: Cornell University Press, 1988.
_____. *On Topical Differences: a commentary [De topicis differentiis]*. Edição de Fiorella Magnano. Roma: Fédération Internationale des Instituts d'Études Médiévales, 2017.
BOLZANO, B. *Theory of Science*. Tradução: Paul Rusnock e Rolf George. Oxford: Oxford University Press, 2014,
BOOLE, G. *An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. Londres: Walton and Maberly, 1854.
BRENTJES, S. Arabic and Arabo-Latin Translations of Euclid's Elements. In G. W. Most, D. Schäfer, & M. Söderblom Saarela (Eds.), *Plurilingualism in Traditional Eurasian Scholarship: Thinking in Many Tongues*. Leiden: Brill, p. 376-387, 2023.
BURNET, J. *Platonis opera*, 1903.
BURNYEAT, M. Enthymeme: The Logic of Persuasion. In D. J. Furley & A. Nehamas (Eds.), *Aristotle's Rhetoric*. Princeton: Princeton University Press, p. 3–55, 1994.
CATENA, P. Catena 1556. *Vniversa loca in Logicam Aristotelis in Mathematicas Disciplinas hoc novum opus declarat*. Cum Privilegio. Venetiis In Oficina Francisci Marcolini, 1556.
CARNAP, R. *The Logical Structure of the World*. Tradução: Rolf A. George. Berkeley: University of California Press, [1928] 1967.
_____. *An Introduction to the Philosophy of Science*. Nova York: Basic Books, Inc., 1966.
CASALINI, C. *Aristóteles em Coimbra: O Cursus Conimbricensis e a educação no Collegium Artium*. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra, 2015.
_____. *Jesuit Philosophy on the Eve of Modernity*. Leiden: Brill, 2019.
CHATEAUBRIAND, O. *Logical Forms. Part II: Logic, Language, and Knowledge*. Coleção CLE, Unicamp, 2005.
CICERO. *De Re Publica*; *De Legibus*. Tradução de Clinton Walker Keyes. Loeb Classical Library. London: Heinemann, 1928.
_____. *Brutus*. Tradução de G. L. Hendrickson; *De oratore*. Tradução de H. M. Hubbell. Loeb Classical Library. London: Heinemann, 1939.
_____. *De Inventione. De Optimo Genere Oratorum. Topica*. Tradução de Harry Mortimer Hubbell. Cambridge: Harvard University Press, 1949.
_____. *De oratore*. Tradução de Harris Rackham. Cambridge: Harvard University Press, 1977.
CIOCCI, A. Federico Commandino and his Latin edition of Aristarchus's *On the Sizes and Distances of the Sun and the Moon*. *Archive for History of Exact Science*s, v. 77, n. 1, p. 1-23, 2023a.
_____. Federico Commandino and the Latin edition of Apollonius's *Conics* (1566). *Archive for History of Exact Sciences*, p. 1-29, 2023b.
CLAGETT, Marshall. The medieval Latin translations from the Arabic of the Elements of Euclid, with special emphasis on the versions of Adelard of Bath. *Isis*, v. 44, n. 1/2, p. 16-42, 1953.

CLÁVIO, C. *Theodosii Tripolitæ Sphæricorum libri III a Christophoro Clavio Bambergensis Societatis Iesu perspicuis demonstrationibus ac scholijs illustrati*. Roma: D. Basa, 1586.
_____. *Ordo servandus in addiscendis disciplinis mathematicis.* In Ladislau Lukacs (Ed.), *Monumenta Paedagogica Societatis Iesu. Collectanea de Ratione Studiorum Societatis Iesu (1588-1616).* Vol. VII. Monumenta Historica Societatis Iesu A Patribus Eiusdem Societatis Edita Volumen 141. Roma: Institutum Historicum S. I., 1992.
_____. *Modus quo disciplinae mathematicae in scholis Societatis possent promoveri.* In Ladislau Lukacs (Ed.), *Monumenta Paedagogica Societatis Iesu. Collectanea de Ratione Studiorum Societatis Iesu (1588-1616).* Vol. VII. Monumenta Historica Societatis Iesu A Patribus Eiusdem Societatis Edita Volumen 141. Roma: Institutum Historicum S. I., 1992.
_____. *De re Mathematica instructio*. In Ladislau Lukacs (Ed.), *Monumenta Paedagogica Societatis Iesu. Collectanea de Ratione Studiorum Societatis Iesu (1588-1616).* Vol. VII. Monumenta Historica Societatis Iesu A Patribus Eiusdem Societatis Edita Volumen 141. Roma: Institutum Historicum S. I., 1992.
_____. *Opera Mathematica*. Moguntiae: Sumptibus Antonii Hierat, excudebat Reinhardus Eltz, 1612.
COPE, E. M. *An introduction to Aristotle's Rhetoric: with analysis, notes and appendices*. Londres: Macmillan, 1867.
COPI, I. *Introdução à lógica*. Tradução: Álvaro Cabral. São Paulo: Editora Mestre Jou, 1983.
COUTURAT, L. *La logique de Leibniz: d'après des documents inédits*. Paris: Ancienne Librairie Germer Baillière, 1901.
CRIPPA, D. *Impossibility results: from geometry to analysis : A study in early modern conceptions of impossibility*. Tese (Doutorado). Univeristé Paris Diderot Paris 7, 2014.
_____. *The impossibility of squaring the circle in the 17th century: a debate among Gregory, Huygens and Leibniz*, Springer, 2019.
DA SILVA, J. J. *Filosofias da matemática*. São Paulo: Fapesp, 2007.
DEAR, P. Jesuit mathematical science and the reconstitution of experience in the early seventeenth century. *Studies in History and Philosophy of Science,* Part A, v. 18, n. 2, p. 146-152, 1987.
_____. *Mersenne and the Learning of the Schools*, Cornell University Press, 1988.
_____. *Discipline and Experience: The Mathematical Way in the Scientific Revolution*. Chicago: University of Chicago Press, 1995.
DE JONG, W. R. Bernard Bolzano: Analyticity and the Aristotelian model of science. *Kant-Studien*, 92, p. 328–349, 2001.
_____. The analytic-synthetic distinction and the classical model of science: Kant, Bolzano and Frege. *Synthese* 174, p. 237-261, 2010.
DE JONG, W. R. & BETTI, A. The Classical Model of Science: a millennia-old model of scientific rationality. *Synthese*, 174, p. 185–203, 2010.
DE MORGAN. *Formal logic, or, The calculus of inference, necessary and probable*. Londres: Taylor and Walton, 1847.
DE PACE, A. *Le matematiche e il mondo. Ricerche su un dibattito in Italia nella seconda metà del Cinquecento*. Milano: Franco Angeli, 1993.
DESCARTES, R. *Œuvres de Descartes*. Edição de Charles Adam & Paul Tannery. Paris: Léopold Cerf,1897-1913.
DETLEFSEN, M. Formalism and Hilbert's understanding of consistency problems. *Archive for Mathematical Logic*, v. 60, n. 5, p. 529-546, 2021.

DE RISI, V. (Ed.). *Mathematizing Space The Objects of Geometry from Antiquity to the Early Modern Age*. Suíça: Birkhäuser, 2015.
_____. The development of Euclidean axiomatics. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 70, n. 6, p. 591-676, 2016a.
_____. Francesco Patrizi and the new geometry of space. In K. Vermeir & J. Regier, *Boundaries, Extents and Circulations: Space and Spatiality in Early Modern Natural Philosophy*. Suíça: Springer Cham, p. 55-106, 2016b.
_____. Did Euclid Prove Elements I, 1? The Early Modern Debate on Intersections and Continuity. In P. Beeley, Y. Nasifoglu & B. Wardhaugh (Eds.), *Reading Mathematics in the Early Modern Europe. Studies in the Production, Collection, and Use of Mathematical Books*, London: Routledge, p. 12-32, 2020.
_____. Euclid Upturned: Borelli on the Foundations of Geometry. *Physis, rivista internazionale di storia della scienza*, n. LVIII, 2022.
DIÓGENES LAÉRCIO, *Vidas e doutrinas de filósofos ilustres*. Tradução Mário da Gama Kury. Brasília: Editora UnB, 1987.
_____. *Lives of Eminent Philosophers*. Tradução de R. D. Hicks. 2 vols. Cambridge: Harvard University Press, 1925.
DUHEM, P. *Le système du monde: histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*. Paris: A. Hermann et Fils, 1913.
ERASMO. *Paraphrase on Mark [Paraphrasis in Marcum]*. Tradução de Erika Rummel. In Robert D. Sider (Ed.), *Collected Works of Erasmus*, Vol. 49, New Testament Scholarship. Toronto: University of Toronto Press, 1988.
ESQUISABEL, O. M., SANZ, W., SAUTTER, F. T. & SECCO, G. D. (Orgs.), *De Mathematicae atque Philosophicae Elegantia: Notas Festivas para Abel Lassalle Casanave*. Londres: College Publications, 2021.
FEINGOLD, M. (Ed.). *Before Newton: the life and times of Isaac Barrow*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
FALLIS, D. Intentional Gaps in Mathematical Proofs. *Synthese* 134, p 45-69, 2003.
FERREIRÓS, J. & LASSALLE CASANAVE, A. Dedekind and Wolffian Deductive Method. *Journal for General Philosophy of Science*, 2022.
FILOPONO, *In Aristotelis analytica posteriora commentaria cum Anonymo in librum ii*. Editado por Maximilian Wallies. Berolini: Typ. et impensis G. Reimeri, 1909.
FINÉ, O. *Protomathesis*. Paris, 1532.
FLAVIO JOSEFO. *The Complete Works of Flavius Josephus.* Edição e tradução de H. ST. J. Thackeray, R Marcus, A. Wikgren, & L. Feldman. Loeb Classical Library. Cambridge: Harvard University Press, 1926-1998.
FOWLER, D. H. *The Mathematics of Plato's Academy*. Oxford: Oxford University Press, 1987.
FRANK, M. The Curious Case of QP. 6: The Reception of Archimedes' Mechanics by Federico Commandino and Guidobaldo dal Monte. *Revue d'histoire des sciences*, v. 68, n. 2, p. 419-446, 2015.
FIRPO, L. Filosofia italiana e controriforma. *Rivista di filosofia*, 41, 150-173, 1950.
FREGE, G. *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Tradução de S. Bauer-Mengelberg. In J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel:*

A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. Cambridge, MA: Harvard University Press, [1879] 1967.
_____. *The foundations of arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the concept of number*. Tradução: J. L. Austin. 2 ed. New York: Harper & Brothers, 1980a.
_____. *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Tradução: Hans Kaal. Oxford: Basil Blackwell, 1980b.
GASSENDI, P. *Exercitationes paradoxicae adversus aristoteleos, in quibus praecipua totius peripateticae doctrinae fundamenta excutiuntur, opiniones vero aut novae, aut ex vetustioribus obsoletae stabiliuntur, auctore Petro Gassendo*. Grenoble: Pierre Verdier, 1624; Lyon: Laurent Anisson and Jean Baptiste Devenet, 1658.
GILBERT, N. W. *Renaissance Concepts of Method*. New York: Columbia University Press, 1960.
GIOVANNINI, E. N., & LASSALLE‑CASANAVE, A. From Magnitudes to Geometry and Back: De Zolt's Postulate. *Theoria*, 2022.
GINZBURG, C. *Relações de força: história, retórica, prova*. Tradução: Jônatas Batista Neto. São Paulo: Companhia das Letras, 2002.
GLASNER, R. & BARANESS, A. *Alfonso's Rectifying the Curved: a fourteenth-fentury hebrew geometrical-philosophical treatise*. Switzerland: Springer, 2020.
GOW, J. *History of greek mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1884.
GRANT, E. *Much Ado about Nothing: Theories of Space and Vacuum from the Middle Ages to the Scientific Revolution*, New York: Cambridge University Press, 1981.
GRENDLER, P. F. *The Jesuits and Italian Universities, 1548-1773.* Catholic University of America Press, 2017.
GRIMALDI, W. M. A. *Aristotle, Rhetoric I-II: A Commentary*. New York: Fordham University Press, 1980/1988.
GRIMBERG, G. É. O estatuto do diagrama nos *Elementos* de Euclides. *Revista Brasileira de História da Ciência*, v. 8, n. 1, p. 6-21, 2015.
HALLETT, Reflections on the Purity of Method in Hilbert's *Grundlagen der Geometrie*. In: Mancosu, P. (ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice*. New York: Oxford University Press, p. 198-255, 2008,
HARGRAVE, J. 2019. Eighteenth-Century Editorial Style at Work: The Editing of *The Elements of Euclid* by Isaac Barrow and Robert Simson. In: HARGRAVE, J., *The Evolution of Editorial Style in Early Modern England*. New Directions in Book History. Palgrave Macmillan, Cham, p. 123-151, 2019.
HARRISON, A. R. W. 1968-71, *The Law of Athens.* 2 Vols. Oxford: Clarendon Press.
HEATH, T. L. *Mathematics in Aristotle*. Oxford: Oxford University Press, 1949.
_____. (1921). *A History of Greek Mathematics*, Vol. 1. Oxford: Clarendon Press.
HARTSHORNE, R. *Euclid and beyond*. New York: Springer-Verlag, 2000.
HELBING M.O., La fortune des Commentaires de Proclus sur le premier livre des Eléments d'Euclide à l'époque de Galilée, In Bechtle G. & O'Meara D.J. (eds.), La philosophie des mathématiques de l'Antiquité tardive, Actes du colloque international, 2000.
HEMPEL, C. G. Geometry and Empirical Science. *American Mathematical Monthly*, 52, 1945.
_____. *Philosophy of Natural Science*. Londres: Prentice-Hall, Inc., 1966.

HERIGONE, P. *Cursus mathematicus, nova, brevi, et clara methodo demonstratus per notas reales et universales, citra usum cujuscunque idiomatis intellectu faciles/Cours mathématique, démontré d'une nouvelle, brieve et claire méthode, par notes réelles et universelles, qui peuvent être entendues facilement sans l'usage d'aucune langue.* Paris: Le Gras, 1634.
HILBERT, D. *The Foundations of Geometry*. Tradução de E. J. Townsend. La Salle: The Open Court Publishing Company. [1899] 1950.
_____. Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8, 1902,
_____. Axiomatic thought. In William Ewald, *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics*, vol. II, Oxford University Press, p. 1105-1115, 2005.
_____. On the concept of number. In William Ewald, *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics*, vol. II, Oxford University Press, p. 1089-1096, 2005.
_____. On the foundations of logic and arithmetics. In Jean van Heijenoort (Ed.), *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967.
_____. The foundations of mathematics. In Jean van Heijenoort (Ed.), *From Frege to Godel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967.
_____. On the infinite. In: Jean van Heijenoort (Ed.), *From Frege to Godel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967
HOMERO. *Ilíada*. Tradução, prefácio e notas de Trajano Vieira. São Paulo: Editora 34, 2020.
ISÓCRATES. *Isocrates with an English Translation*. 3 Vols. Tradução de George Norlin. Cambridge: Harvard University Press, 1980.
JAEGER, W. *Aristotle: Fundamentals of the history of his development*. Tradução: Richard Robinson. 2 ed. New York: Oxford University Press, 1968.
JAOUICHE K. 1986. *La théorie des parallèles en pays d'islam: contribution à la préhistoire des géométries non-euclidiennes*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1986.
JARDINE, N. Epistemology of the Sciences. In Schmitt et al., *The Cambridge history of Renaissance philosophy*, New York: Cambridge University Press, 1988.
KEPLER, J. *Harmonices mundi libri V.* Lincii Austriae: Sumptibus Godofredi Tampachii: Excudebat Ioannes Plancus, 1619.
KLEENE, S. C. *Introduction To Metamathematics*. Groningen: Wolters-Noordhoff Publishing, 1952.
KLEIN, F. *Development of mathematics in the 19th century*. Tradução de M. Ackerman. Massachusetts: Math Sci Press, 1979. Texto alemão originalmente publicado em 1928.
_____. *Elementary Mathematics from a Advanced standpoint.* Tradução de Gert Schubring. Berlim: Springer-Verlag, 2016. Baseado na versão alemã de 1933.
KLINE, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. 2 Vols. Oxford: Oxford University Press, 1972.
KNEALE, M. & KNEALE, W. *The Development of Logic.* New York: Oxford University Press, 1962.
KNORR, W. R. The impact of modern mathematics on ancient mathematics. *Revue d'histoire des mathématiques*, v. 7, n. 1, p. 121-135, 2001.
_____. The practical element in ancient exact sciences. Synthese, v. 81, p. 313-328, 1989.
_____. *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Boston: Birkhäuser, 1986.
_____. Construction as existence proof in ancient geometry. *Ancient Philosophy*, v. 3, n. 2, p. 125-148, 1983.

_____. On the early history of axiomatics: The interaction of mathematics and philosophy in Greek antiquity. In: *Theory Change, Ancient Axiomatics, and Galileo's Methodology: Proceedings of the 1978 Pisa Conference on the History and Philosophy of Science Volume I.* Dordrecht: Springer Netherlands, p. 145-186, 1980.
KOYRÉ, A. Galileo and the scientific revolution of the seventeenth century. *The Philosophical Review*, v. 52, n. 4, p. 333-348, 1943a.
_____. Galileo and Plato. *Journal of the History of Ideas*, vol. 4, no. 4, pp. 400–28, 1943b.
_____. La mécanique céleste de J A Borelli, *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications* 5, p. 101-138, 1952.
LASSALLE CASANAVE, A. Entre la retórica y la dialéctica. *Manuscrito*, v. 31, n. 1, pp. 11-18, 2008.
_____. Por construção de conceitos. In: Joel Thiago Klein (org.), *Comentários às obras de Kant: Crítica da Razão Pura*. Florianópolis: NEFIPO, p. 657–694, 2012.
_____. Diagramas en pruebas geométricas por *reductio ad absurdum*. In: Oscar M. Squisabel & Frank T. Sautter, *Conocimiento simbólico y conocimiento gráfico: historia y teoría*. Buenos Aires: Centro de Estudios Filosóficos Eugenio Pucciarelli, p. 21–28, 2013.
_____. Uma introdução à recepção moderna da geometria euclidiana. *O que nos faz pensar*, v. 25, n. 39, p. 7-29, 2016.
_____. *Por construção de conceitos: Em torno da filosofia kantiana da matemática*. Rio de Janeiro: Edições Loyola, 2019.
LASSALLE CASANAVE, A. & PANZA, M. "Pruebas entimemáticas y pruebas canónicas en la geometría plana de Euclides". *Revista Latinoamericana de Filosofía*, XLI (2), p.147-170, 2015.
LASSALLE CASANAVE, A. & SAUTTER, F. T. *Visualização nas Ciências Formais.* London: College Publications, 2012.
LAPOINTE, S. Bolzano a priori knowledge, and the Classical Model of Science. *Synthese* 174, p. 263–281, 2010.
(PSEUDO)LONGINUS. *On the Sublime [De sublimitate]*. Tradução de W. Hamilton Fyfe. Loeb Classical Library 199. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1995.
LORCH, R. Greek-Arabic-Latin: The transmission of mathematical texts in the Middle *Ages. Science in context*, v. 14, n. 1-2, p. 313-331, 2001.
LUCIANO DE SAMÓSATA. *Filosofia em leilão*. Tradução e notas de Custódio Magueijo. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra, 2013.
LUKÁCS, L. (Ed.). *Monumenta Paedagogica Societatis Iesu. Collectanea de Ratione Studiorum Societatis Iesu (1588-1616).* Vol. VII. Monumenta Historica Societatis Iesu A Patribus Eiusdem Societatis Edita Volumen 141. Roma: Institutum Historicum S. I., 1992.
MACHADO MOTA, B. *O estatuto da matemática em Portugal nos séculos XVI e XVII*. Tese (Doutorado). Universidade de Lisboa (Portugal), 2008.
MALET, A. Euclid's Swan Song: Euclid's *Elements* in Early Modern Europe. In: Paula Olmos, *Greek Science in the Long Run: Essays on the Greek Scientific Tradition (4th c. BCE-17th c. CE)*. Newcastle: Cambridge Scholars Publishing, 2012.
MANCOSU, P. *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century.* Oxford: Oxford University Press, 1996.
_____. *Philosophy of Mathematical Practice*. New York: Oxford University Press, 2008.

MANDERS, K. 2008. The Euclidean Diagram. In: Paolo Mancosu, *Philosophy of Mathematical Practice*. Nova York: Oxford University Press, p. 80–130, 2008.
MARINUS. *Proclus ou Sur le bonheur.* Edição e tradução: Henri-Dominique Saffrey e Alain Philippe Segonds. Series: Collection des universités de France. Paris: Les Belles Lettres, 2001.
MARTJN, M. From Plotinus to Procluss. In Lloyd Gerson & James Wilberding (Eds), *The new Cambridge companion to Plotinus*. Cambridge: Cambridge University Press, p. 65-89, 2022.
MAZZONI, J. *In universam Platonis et Aristotelis philosophiam praeludia, sive de omparatione Platonis et Aristotelis*. Veneza: Giovanni Guerigli, 1597.
MCLAUGHLIN, P. On the Authenticity and Reception of Aristotle's Mechanical Problems, 2022. (Inédito.)
MELO, F. *Obras matemáticas*. Edição crítica e tradução: Bernardo Mota & Henrique Leitão. 2 Vols. Lisboa: Biblioteca Nacional de Portugal - Centro de Estudos Clássicos, 2014.
MOLINA, J. A. Port Royal: Filosofía de la Geometría. *Revista Portuguesa de Filosofia*, v. 73, n. 3/4, p. 1203-1238, 2017.
_____. Catholicism and Mathematics in the Early Modernity. *Interfaces between Mathematical Practices and Mathematical Education*, p. 47-67, 2019.
MONTAIGNE, M. *Essais*. Edição de F. Strowski. Paris: Hachette, 1912.
MOREAU, J. *Aristote et son école*. Paris: Presses Universitaires de France, 1962.
Lloyd, G. E. R. Aristotle: the growth and structure of his thought. Cambridge: Cambridge University Press, 1968.
MUELLER, I. Greek Mathematics and Greek Logic. In Corcoran J. (eds) *Ancient Logic and Its Modern Interpretations.* Synthese Historical Library, vol 9. Springer, Dordrecht, p. 37-48, 1974.
_____. *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*. Massachusetts: MIT Press, 1981.
MUMMA, J. Diagramas e entimemas. In, Gisele Dalva Secco, Frank Thomas Sautter, Oscar Miguel Esquisabel & Wagner Sanz (Orgs.), *De Mathematicae atque Philosophicae Elegantia: Notas Festivas para Abel Lassalle Casanave*. Londres: College Publications, p. 126-132, 2021.
NAUTA, L. *In Defense of Common Sense: Lorenzo Valla's Humanist Critique of Scholastic Philosophy*. Massachusetts: Harvard University Press, 2009.
NETZ, R. *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999a.
_____. Proclus' Division of the Mathematical Proposition into Parts: How and Why Was it Formulated?, *The Classical Quarterly, New Series*, Vol. 49, No. 1, 1999b.
_____. *A New History of Greek Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2022.
NEUGEBAUER, O. *The Exact Sciences in Antiquity,* New York: Dover Publications, 1969.
_____. *A History of Ancient Mathematical Astronomy*. New York: Springer-Verlag, 1975.
OLIVEIRA DA SILVA, M. A. Considerações sobre a abstração matemática de Tomás De Aquino. *Revista Philósophos*, v. 27, n. 1, 2022.
_____. Alberto Magno e a recepção arabo-latina de Euclides. *Dois Pontos,* v. 18, n. 1, 2021.
PANZA, M. The twofold role of diagrams in Euclid's plane geometry. *Synthese*, v. 186, p. 55–102, 2012.

PATRIZI, F. *La città felice … Dialogo dell'honore, il Barignano. Discorso della diversità de' furori poetici*, Venice: Giovan. Griffio, 1553.
_____. *Della retorica*. Dieci dialoghi, Florence: F. Senese, 1562.
_____. *Discussionum peripapeticarum tomi primi, libri XIII,* Venice: D. de Franciscis, 1571.
_____. *Discussionum peripateticarum tomi IV, quibus Aristotelicae philosophiae universa historia atque dogmata nunc veterum placitis collata, eleganter et erudite declarantur,* Basel: ad Pernam Lecythum, 1581.
_____. *De rerum natura libri ii priores. Aliter de spacio physico, aliter de spacio mathematico*, Ferrara: Baldinus, 1587a.
_____. *Della nuova geometria …libri XV,* Ferrara: Baldini, 1587b.
_____. *Nova de universis philosophia in qua aristotelica methodo non per motum sed per lucem et lumina ad primam causam ascenditur. Deinde propria Patricii methodo tota in contemplationem venit Divinitas. Postremo, methodo platonica, rerum universitas a conditore Deo deducitur,* Ferrara: Mammarelli, 1591.
ONG, W. *Ramus: Method and the Decay of Dialogue*. Cambridge: Harvard University Press, 1958.
PEANO, G. *Formulario mathematico*. Turim: Fratres Bocca Editores, 1908. Primeira exposição em 1895.
PEDRO HISPÂNICO. *Summaries of Logic [Summulae Logicales].* Edição, tradução, introdução e notas de Brian P. Copenhaver, Calvin Normore & Terence Parsons. Oxford: Oxford University Press, 2014.
PICCOLOMINI, A. *In Mechanicas Quaestiones Aristotelis* [...]. Excussum Romae, apud Antonium Bladum Asulanum, 1547.
PICO DELLA MIRANDOLA, G. F. *Examen vanitatis doctrinae gentium et veritatis Christianae disciplinae: distinctum in libros sex, quorum tres omnem philosophorum sectam universim: reliqui Aristoteleam et Aristoteleis armis particulatim impugnant: ubicunque autem Christiana et asseritur et celebratur disciplina*. Mirandola: Giovanni Mazzocchi, 1520.
PLATÃO. *República*. Tradução: Maria Helena da Rocha Pereira. 9. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.
_____. *The Republic of Plato*. Edição de James Adam. 2 vols. Cambridge: Cambridge University Press, [1902] 2009.
Plutarco. *Moralia, Vol. X* (*Vitae decem oratorum*). Tradução de Harold North Fowler. Cambridge Harvard University Press, 1936.
POINCARÉ, H. Review of Hilbert's *Foundations of geometry*. *Bulletin of American Mathematical Society*, 10(1), p. 1-23, 1903.
PÓLYA, G. *How To Solve It*: *A New Aspect of Mathematical Method*. 2 ed. Princeton: Princeton University Press, 1957.
POPPER, K. R. *A lógica da pesquisa científica.* Tradução: Leonidas Hegenberg & Octanny Silveira da Mota. São Paulo: editora Cultrix, [1934] 1972.
PORCHAT PEREIRA, O. *Ciência e dialética em Aristóteles*. São Paulo: Unesp, 2001.
PROCLUS. *Procli Diadochi Lycii in Primum Euclidis Elementorum Comentariorum Libri IV.* Tradução de Francesco Barozzi. Pádua, 1560.
_____. *Procli Diadochi In Primum Euclidis Elementorum Librum Comentarii*. Edição: Gottfried Friedlein. Lipsiae: B. G. Teubner, 1873.
_____. *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Tradução, introdução e notas:

Glenn R. Morrow. Princeton University Press, 1970.
_____. *Commentary On Plato's Parmenides*. Tradução: Glenn R. Morrow & John M. Dillon, New Jersey: Princeton University Press, 1992.
QUINTILIANO. *Instituição oratória*. Tradução, apresentação e notas de Bruno Fregni Bassetto. São Paulo: Editora Unicamp, 2015.
RASHED, R. & HOUZEL, C. Thābit Ibn Qurra et la théorie des paralléles. *Arabic Sciences and Philosophy* 15, p. 43-46, 2005.
REGIOMONTANO. *Rvdimenta astronomica Alfragrani. Item Albategnivs astronomvs peritissimvs de motv stellarvm, ex obseruationibus tum proprijs, tum Ptolemaei, omnia cu[m] demonstratio[n]ibus geometricis & additionibus Ioannis de Regiomonte. Item, Oratio introductoria omnes scientias mathematicas Ioannis de Regiomonte, Patauij habita, cum Alfraganum publice praelegeret. Eivsdem utilissima introductio in elementa Euclidis. Item, Epistola Philippi Melanthonis nuncupatoria, ad Senatum Noribergensem*. Nuremberg: Johann Petreius, 1537.
REICHENBACH, H. *Experience and Prediction: An Analysis of the Foundations and the Structure of Knowledge*. Chicago: The University of Chicago Press, 1938.
REID, *Hilbert*, Springer-Verlag, 1996.
REIMANN, C. Ferdinando de'Medici and the Typographia Medicea, In Nina Lamal, Jamie Cumby, & Helmer J. Helmers, *Print and Power in Early Modern Europe (1500–1800).* Leiden: Brill, p. 220-238, 2021.
RICCARDI, P. *Saggio di una bibliografia euclidea*. Bologna: Georg Olms Verlag, 1887.
ROMMEVAUX, S. *Clavius: une clé pour Euclides au XVIe siècle*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 2005.
ROSE, P. L. Humanist Culture and Renaissance Mathematics: The Italian Libraries of the Quattrocento. *Studies in the Renaissance*, v. 20, p. 46-105, 1973.
_____. *The Italian Renaissance of Mathematics: Studies on Humanists and Mathematicians from Petrarch to Galileo*, Genève, 1975.
_____. A venetian patron and mathematician of the sixteenth century: Francesco Barozzi (1537 – 1604), *Studi Veneziani*, I, p. 119–178, 1977.
ROSHDI, R. *Angles et Grandeur: D'Euclide à Kamāl al-Dīn l-Fārisī*. Berlim: De Gruyter, 2015.
ROSS, D. *Aristotle*. Londres: Methuen & Co., 1923,
RUSSELL, B. *The Principles of Mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press, 1903.
_____. Geometry, Non-Euclidean. In Gregory H. Moore (Ed.), *Toward the "Principles of mathematics", 1900-02*. The Collected Papers of Bertrand Russell. Vol. III. New York: outledge, [1902] 1993.
_____. *An Essay on the Foundations of Geometry*. New York: Routledge, [1897] 2023.
RUSSELL, B. & WHITEHEAD, A. *Principia mathematica*. 3 Vols. Cambridge: Cambridge University Press, 1910-1913.
SABRA A.I., Thābit Ibn Qurra on Euclid's Parallels Postulate. *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*, 31, p. 19-20, 1968.
SASAKI, C. *Descartes's mathematical thought*, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2003.

SCHMITT, C. B. *Cicero Scepticus: A Study of the Influence of the Academica in the Renaissance*. Netherlands: Springer, 1972.
SECCO, G. D. *Entre provas e experimentos : uma leitura wittgensteiniana das controvérsias em torno da prova do Teorema das Quatro Cores*. Tese (Doutorado). Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica, 2013.
SEOANE, J. *Lógica y Argumento*. Montevidéu: Comisión Sectorial de Enseñanza, 2015.
_____. Heterogeneidad euclidiana. *O que nos faz pensar*, v. 29, n. 49, p. 78-99, 2021.
_____. SEOANE, José. El 'método de superposición'en Euclides. *Signos filosóficos*, v. 24, n. 48, p. 88-113, 2022.
SIDOLI, N. Uses of construction in problems and theorems in Euclid's *Elements* I–VI. *Archive for History of Exact Sciences*, 72, p. 403–452, 2018.
SUNDHOLM, G. Questions of proof. *Manuscrito*, XVI (2), pp. 47-70, 1993.
THOMAS, I. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. 2 vols. Cambridge: Harvard University Press (Loeb Classical Library), 1939-1941.
TITO LÍVIO. *Ab urbe condita*. Berlin. Edição de W. Weissenborn e H. J. Müller. Leipzig. B. G. Teubner, 1898.
TODD, S. C. *The shape of Athenian law*. Oxford: Clarendon Press, 1993.
VAN DER HAM *ET AL*. Universal intuitions of spatial relations in elementary geometry. *Journal of Cognitive Psychology*, 29(3), pp. 269-278, 2017.
VAN DER WAERDEN. *Science Awakening*. New Jersey: Frederick Ungar Publishing Company, Inc., 1954.
VENN, J. Symbolic logic, Londres: Macmillan and Co., 1881.
VITRÚVIO. *De Architectura*. Edição de F. Krohn. Lipsiae. B.G. Teubner, 1912.
WALLACE, W. A. *Galileo and his sources: the heritage of the Collegio Romano in Galileo's science*. Princeton: Princeton University Press, 1984.
WEYL, H. David Hilbert and his mathematical work. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 50, p. 612–654, 1944.
_____. *Philosophy of Mathematics and Natural Science* Princeton: Princeton University Press, [1927] 1949.
WOLFF, F. Ciência aristotélica e matemática euclidiana. *Analytica: Revista de Filosofia*, v. 8, n. 1, p. 43-88, 2004.
XENOFONTE. *Memoráveis*. Tradução, introdução e notas: Ana Elias Pinheiro. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra, 2009.